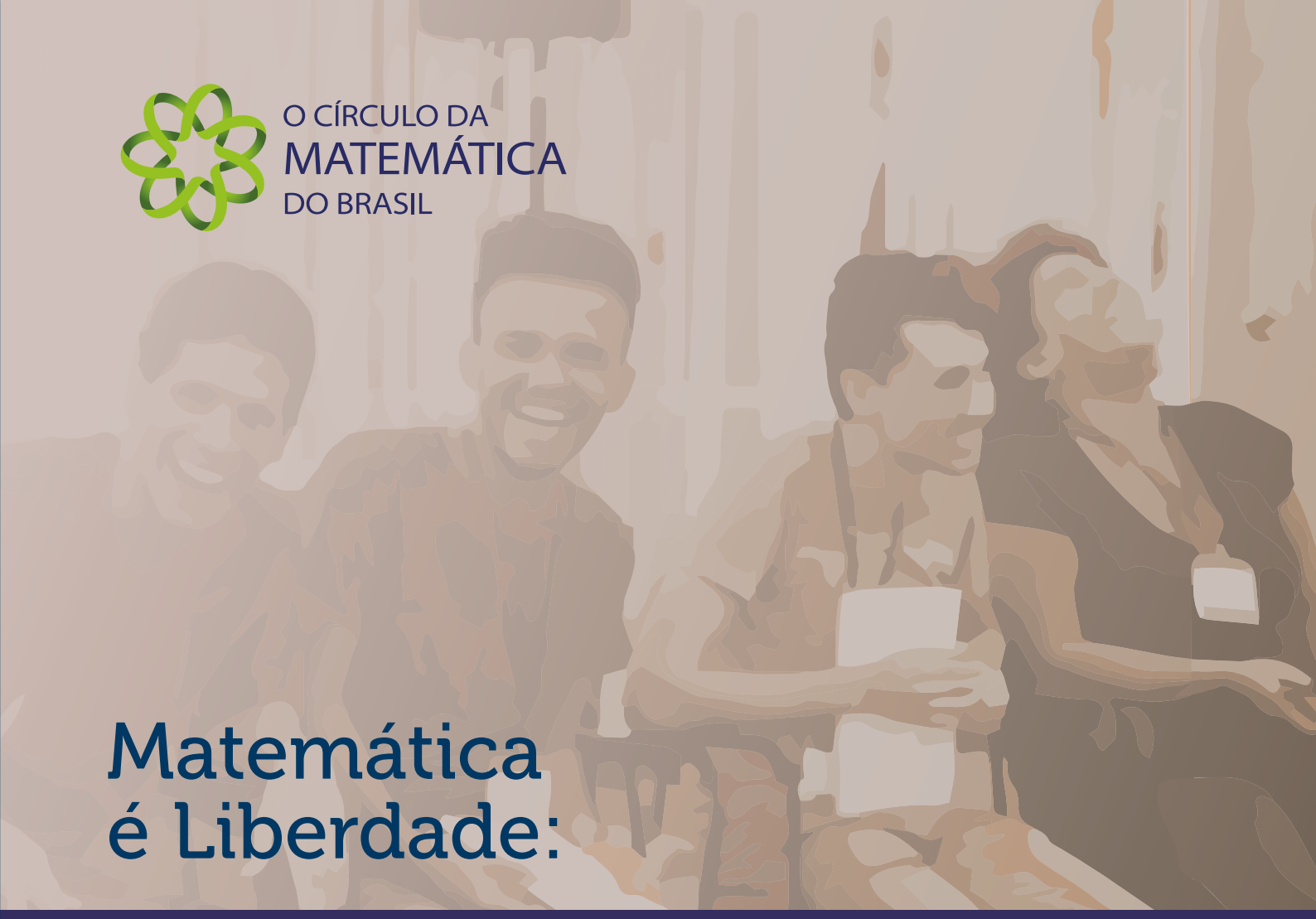
O CÍRCULO DA
MATEMÁTICA
DO BRASIL



Matemática é Liberdade:

The Math Circle e O Círculo da Matemática do Brasil

Organizadores
Robert Kaplan
Ellen Kaplan
Flavio Comim

Instituto TIM

Matemática é Liberdade:

The Math Circle e O Círculo da Matemática do Brasil

Porto Alegre
Universidade Federal do Rio Grande do Sul
Instituto TIM
2020

Realização: **Universidade Federal do Rio Grande do Sul (UFRGS), em parceria com Instituto TIM**

Cooperação: **Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO)**

Organizadores: **Robert Kaplan, Ellen Kaplan e Flavio Comim**

Coordenação técnica da Representação da UNESCO no Brasil:

Marlova Jovchelovitch Noleto,
Diretora e Representante

Maria Rebeca Otero Gomes,
Coordenadora do Setor de Educação

Revisão técnica: **Setor de Educação da Representação da UNESCO no Brasil**

Revisões: **Unidade de Publicações da Representação da UNESCO no Brasil**

Projeto gráfico: **Raruti Comunicação e Design**

Capa: **Rafael Hildebrand**

© UFRGS 2020

Esta publicação está disponível em acesso livre ao abrigo da licença Atribuição-Uso Não-Comercial-Partilha 3.0 IGO (CC-BY-NC-SA 3.0 IGO) (http://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/3.0/igo/). Ao utilizar o conteúdo da presente publicação, os usuários aceitam os termos de uso do Repositório UNESCO de acesso livre (http://unesco.org/open-access/terms-use-ccbyncsa-en).

Esta publicação tem a cooperação da UNESCO no âmbito da parceria entre a UFRGS e o Instituto TIM, a qual tem o objetivo de qualificar o ensino da matemática. As indicações de nomes e a apresentação do material ao longo deste livro não implicam a manifestação de qualquer opinião por parte da UNESCO a respeito da condição jurídica de qualquer país, território, cidade, região ou de suas autoridades, tampouco da delimitação de suas fronteiras ou limites. As ideias e opiniões expressas nesta publicação são as dos autores e não refletem obrigatoriamente as da UNESCO nem comprometem a Organização.

E96

Matemática é liberdade: the math circle e o circulo da matemática do Brasil / Organizado por Robert Kaplan, Ellen Kaplan e Flavio Comim. – Porto Alegre, RS : Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Instituto TIM, 2020.
340 p. : il.

Incl. bibl.
ISBN 978-85-66094-49-7

1. Ensino de matemática. 2. Inovações educacionais. 3. Inteligência 4. Qualidade educacional. 5. Violência 6. Escolas 7. Desenvolvimento humano 8. Desenvolvimento sustentável 9. Brasil. I. Kaplan, Robert II. Kaplan, Ellen III. Comim, Flavio. IV. Brasil. Universidade Federal do Rio Grande do Sul V. Instituto TIM

CDD 370 6 CDU 37

Esclarecimento: a UNESCO mantém, no cerne de suas prioridades, a promoção da igualdade de gênero, em todas as suas atividades e ações. Devido à especificidade da língua portuguesa, adotam-se, nesta publicação, os termos no gênero masculino, para facilitar a leitura, considerando as inúmeras menções ao longo do texto. Assim, embora alguns termos sejam escritos no masculino, eles referem-se igualmente ao gênero feminino.

Sumário

Prefácio • Ubiratan d'Ambrosio 9
Apresentação • Instituto TIM 13
Introdução • Angels Varea 15

Parte 1 • **Matemática e a educação matemática** **18**

Da educação matemática e sociedade à educação matemática e a civilização sustentável: uma ameaça, um apelo e uma proposta • Ubiratan d'Ambrosio 19

Os movimentos da matemática na escola, 1890-1990 • Wagner Rodrigues Valente 31

Parte 2 • **A matemática no Brasil** **50**

O ensino da matemática no Brasil: uma análise dos modelos pedagógicos • Isabel Cristina Machado de Lara 51

Considerações sobre o debate contemporâneo da educação matemática no Brasil • Felipe Augusto Bellé 71

Determinantes do aprendizado em matemática dos estudantes do 5º ano no período de 2007 a 2013 • Eduardo Tillmann 90

Uma análise da relação entre violência na escola e proficiência dos estudantes em matemática • Aline Dalcin 104

Sobre a conveniência de iniciar o ensino-aprendizagem da estatística e da probabilidade na pré-escola • Lori Viali 142

Parte 3 • **A Abordagem do *Math Circle*** **160**

O *Math Circle* • Bob e Ellen Kaplan 161

Apaixonando-se pela matemática • Domniki Georgopoulou 166

A alegria da aprendizagem participativa:
o Círculo da Matemática • Peter Flom 173

O coração do Círculo • Drew Sutherland 177

O Círculo da Matemática: uma ideia revolucionária • Stephen F. Kennedy 183

O Círculo da Matemática do domingo • Nathan Pflueger 199

Parte 4 • **A experiência do Círculo da Matemática do Brasil** **208**

A matemática e o desenvolvimento humano no Brasil:
o caso do Círculo da Matemática • Flavio Comim 209

O conceito de inteligência na escola: uma análise do papel do Círculo da Matemática em desmitificar a visão da inteligência como um atributo fixo • Olivier Bizzocchi, Cinthia Marie Tanaka e Herbert Prince Favero Pinto 231

A quantidade de estudantes em sala de aula interfere no aprendizado?
• Janaína Rodrigues de Almeida, Jaquellyne da Silva Barbosa e
Vinicius Henrique Sbaiz 255

Aprendizagem com turmas reduzidas:
a experiência do Círculo da Matemática do Brasil 266

O Círculo da Matemática e seus efeitos nos "estudantes bagunceiros"
• Ana Cecilia Espírito Santo Queiroz e Ana Julia Carvalho Maia 273

Parte 5 • **Relatos de educadores(as) do Círculo da Matemática do Brasil** **282**

O que significa ser educadora no Círculo da Matemática • Daniela Motta 283

A importância de uma matemática real • Robson Lopes de Alcântara 292

Dividindo ideias • Samanta Stein da Silva 294

E se estudantes e professores gostassem de aprender matemática? Transforme e você também será transformado... • Flavia Levemfous 296

A melhor formação é a vivência • Ítalo Lucas e Karolynne Barrozo 303

O Círculo e a disciplina • Gabriela B. Rodrigues 313

O que eu passei no Círculo da Matemática? • Carolina Raiol Lopes – Belém 314

Os infinitos • Tássio Fonseca Feitosa 316

Alguns relatos • Gabrielle Brito Linhares 318

O que significa a matemática para os estudantes? • Lucas Gonzaga Cruz 320

A individualização e o erro • Paloma Franca 322

Testando a abordagem • Manoela Franco da Silva 323

Com os pequenos • Paulo Vinicius Pereira de Lima 324

A prática da inclusão • Victor Rodrigues Ribeiro 325

Motivação • Rodrigo Turrini Purgato 327

Por que nunca falam dessas coisas na sala de aula? • Alexandre Trilles Junior 328

Sem amor não se faz matemática • Dyego Soares de Araújo 330

Conta uma história de horror para a gente? • Felipi Marques da Rocha Pinto 333

O chefão do fim do jogo • Mateus Marques da Cunha 334

No "chiqueirinho", não! • Rafael Eduardo Silva 335

Experiências humanizadoras • Andreia Ferreira Fernandes e Priscilla Perez 338

Prefácio

Ubiratan d'Ambrosio

Tenho o prazer de prefaciar este livro tão oportuno para a educação, em especial para a educação matemática no Brasil. Tive o privilégio de escrever o Capítulo 1 do livro, no qual traço um cenário do estado do mundo e como a educação matemática se relaciona com esse estado. Utilizo um enfoque geral, alertando para as perspectivas sombrias sobre o futuro da civilização e, em tom dramático, sobre a própria sobrevivência da civilização. Porém, deixo bem claro que uma das estratégias mais promissoras para lidar com os problemas que se acumulam é a matemática, tornada accessível a todos os cidadãos e, portanto, uma educação matemática renovada, eficiente e atual.

Com relação à matemática e à educação matemática, passamos momentos de grande contradição, em todos os países. Enfocando o Brasil, vemos nosso país despontando na matemática, sediando um dos mais destacados institutos de pesquisa do mundo, o Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), tendo um jovem brasileiro, Arthur Ávila, agraciado com a *Fields Medal*, o mais alto reconhecimento de excelência matemática para jovens pesquisadores com até 40 anos de idade, e pelo ótimo desempenho das equipes de estudantes que participam das Olimpíadas Brasileiras e Internacionais de Matemática. Porém, contraditoriamente, os índices relativos à educação no Brasil são desanimadores, particularmente em matemática, disciplina na qual, apesar de termos focos de excelência como apontados acima, o desempenho geral é dos piores do mundo.

A que atribuir isso? Qual é o vilão nessa situação? Falta de recursos? Há recursos consideráveis, mas, em geral estes são mal utilizados. Baixos salários? Sem dúvida, existe a necessidade de melhorar salários: há professores que ganham bem, mas o rendimento ainda é baixo. Excesso de aulas? Há esforços para reduzir a carga didática dos professores, mas isso parece não surtir efeito. A formação de professores é deficiente? Existem excelentes licenciaturas e há oportunidades, embora escassas, de realizar uma pós-graduação. Porém, o resultado de uma melhor formação não tem se traduzido em melhores resultados. Há falta de equipamentos e livros? Acho que não,

pois as publicações estão cada vez mais aprimoradas e, além disso, computadores e internet estão presentes na maioria das escolas. Contudo, é comum serem subutilizados e deteriorados, assim como os prédios e as instalações que, geralmente desenhados e construídos com objetivos políticos, são pouco funcionais e, uma vez inaugurados, entram em rápida deterioração.

O quadro pintado no parágrafo acima abre espaço para pessimismo e desânimo. Porém, este livro, que tenho o prazer de prefaciar, é uma resposta, com uma mensagem importante: podemos fazer algo para melhorar, com base na experiência de sucesso da proposta do *Math Circle* (Círculo da Matemática).

O livro é organizado em cinco partes, mais um prefácio, uma apresentação e uma introdução muito esclarecedora. As duas primeiras partes são dedicadas a estudos sobre a educação matemática em geral e aspectos próprios do Brasil, e as outras três à importante e bem-sucedida proposta do *Math Circle*, idealizado e implementado por Bob e Ellen Kaplan. A Parte 3 fala do *Math Circle* como conceito de uma nova educação, capaz de encantar os estudantes, e as duas últimas partes mostram como a ideia foi trazida e implementada no Brasil, em um ritmo crescente, com resultados animadores, como mostram os relatos exemplares de práticas, situações e experiências em sala de aula.

O *Math Circle* não se propõe a ser uma solução definitiva para os problemas que nos angustiam, na missão de educadores, pais e cidadãos, mas é uma proposta de convivência plural entre diferentes abordagens. É, sem qualquer dúvida, uma excelente proposta e, como tal, inspiradora de muitas outras com o mesmo ideal: encantar os estudantes para abraçarem uma ciência tão necessária e fundamental como é a matemática.

É importante reconhecer que a matemática é fundamental na vida de todos, não como uma mera manipulação de técnicas e operações mecanizadas. Dentre as inúmeras razões que fazem com que a matemática seja muito importante nas escolas, destaco: a matemática é importante para o dia a dia e, sem ela, não podemos viver no mundo moderno; a matemática ajuda a pensar melhor e desenvolve o raciocínio; e a matemática está em todos os lugares: na organização do nosso tempo de afazeres, na linguagem, nas artes, na urbanização e no nosso cotidiano – é a matéria que rege a vida das pessoas.

Há grande necessidade de uma matemática atual, que a integre no mundo moderno, incorporando toda a tecnologia disponível na atualidade, particularmente a informática, que discuta e analise os problemas maiores da humanidade. Daí a importância de temas transversais, de recuperar o lúdico e o artístico da matemática, despertando o prazer de fazer essa ciência, que é bonita e pode encantar.

Acredito que uma boa educação deve preparar os jovens para se integrarem de forma crítica na sociedade como um todo, levando em consideração os avanços científicos e tecnológicos. Uma boa educação deve preparar os jovens para estarem à vontade para analisar o que se passa em seu círculo social e em seu ambiente, e não serem enganados e cooptados pelo fascínio de uma tecnologia avançada que promete verdadeiros milagres, nem pelos discursos bem articulados de políticos que tomam, como verdade, um amontoado de estatísticas e dados falsificados e manipulados. Os objetivos de uma boa educação consistem em que os estudantes aprendam a adquirir conhecimento, aprendam a viver juntos, aprendam a fazer e aprendam a ser. O programa, com os conteúdos necessários, vai se desenvolvendo paulatinamente no cumprimento desses objetivos. O método de projetos tem se mostrado uma boa opção como prática pedagógica.

Vejo como um grande vilão na educação, em particular na educação matemática, o foco nos testes padronizados. Nas licenciaturas, os professores são preparados não para serem educadores, mas para serem treinadores dos estudantes para que estes sejam aprovados nos testes padronizados. Quando formados, os professores vão transmitir a seus estudantes um amontoado de técnicas e conteúdos obsoletos, utilizando metodologias ultrapassadas, preparando-os para passar nos testes padronizados. De fato, o que vemos é que as licenciaturas preparam treinadores, não educadores.

Como disse acima, os resultados da educação matemática têm sido alarmantes. O que acontece com as escolas, cujo rendimento é tão baixo? Proclama-se a abertura de novas escolas e de vagas. A quantidade das matrículas é promissora, mas, poucos meses após o início das aulas, começa a evasão. Isso ocorre em todos os níveis, até nas escolas públicas, nas quais o custo é zero. Há um incrível índice de desistência. Parece haver um desencanto dos estudantes com a escola.

Encantar os estudantes com a matemática é essencial e parece ser um dos mais importantes objetivos do projeto *Math Circle*, muito bem explicitado neste livro.

Apresentação

Matemática, uma experiência extraordinária

A matemática está em todos os lugares.

Alguns dizem que ela é a maior obra coletiva já produzida pela humanidade. Mas muitos ainda se perguntam – especialmente muitas pessoas que, na escola, não gostavam nem um pouco dessa matéria: para que serve a matemática?

Há muitas respostas para essa pergunta. Uma delas é que o rigor da matemática é o que faz a ciência ser ciência. Pois, como Galileu Galilei observou pela primeira vez, "o livro da natureza está escrito em caracteres matemáticos". E foi essa convicção de Galileu que mudou a filosofia natural, que passou de relato verbal, qualitativo, para um relato matemático, com base em evidências empíricas, e que fez surgir a ciência moderna.

É por meio da matemática que traduzimos as estruturas do mundo para as nossas formas de pensar, analisar, abstrair e criar. A matemática é a linguagem da mente, a poesia na qual são as ideias que rimam, não as palavras. Suas equações são dinâmicas e se equilibram quando, com engenho, se descobrem os valores de suas incógnitas; é um raciocínio que não deve ser ditado aos estudantes – pois explicar atrofia aquilo que perguntar desenvolve –, mas que deve sair deles mesmos ao serem expostos a mistérios excitantes na sala de aula, que despertem o seu engenho latente.

Por isso, o Instituto TIM acredita que todas as crianças têm o direito de conhecer os encantos dessa linguagem, de se apropriar dela, de entendê-la e apreciá-la. É uma linguagem tanto mais fértil quanto mais for abordada em uma idade flexível e criativa.

Por meio do Círculo da Matemática do Brasil, o Instituto TIM tem orgulho de dizer que, em cinco anos, mais de 27 mil crianças participaram de sessões nas quais puderam explorar a matemática a partir de uma lógica participativa e colaborativa. Em nome de todas essas crianças beneficiadas, agradecemos aos professores Bob e Ellen Kaplan por aceitar o nosso convite e trazer ao país a metodologia do *Math Circle* que eles desenvolveram na Universidade de Harvard.

Além das aulas para crianças, 4.747 professores da rede pública foram formados na abordagem do projeto, multiplicando-a para mais de 115 mil estudantes de todo o Brasil.

O livro que você tem em mãos agora é parte do resultado deste trabalho. Ele explora as experiências acumuladas pelo Círculo da Matemática do Brasil em escolas de todas as regiões do país. Nele, podemos conhecer a riqueza das salas de aula, o deslumbramento das crianças com as novas descobertas e os desafios enfrentados pelos educadores.

Ao compartilhar esta experiência extraordinária, o Instituto TIM tem como objetivo contribuir com as reflexões para a melhoria contínua da qualidade do ensino e da educação das crianças brasileiras.

Instituto TIM
institutotim.org.br

Introdução

Angels Varea

"A essência da matemática é a sua liberdade", disse Georg Cantor, o matemático russo-alemão, inventor da teoria dos conjuntos, referindo-se ao desenvolvimento da matemática e à introdução de novos números. Sua frase, que inspira o título desta publicação, pode evocar muito mais do que disse Cantor, se for aplicada ao contexto do ensino da matemática no Brasil: ela trata de uma realidade na qual o ensino de baixa qualidade da matemática compromete as liberdades de gerações presentes e futuras; porém, se for melhorado, pode indicar o caminho para um futuro de liberdades substantivas. Sem um bom ensino da matemática, seremos um país com menos cidadania, menos inclusão econômica e social, menos produtividade, menos ciência e tecnologia – em suma, uma país com menos futuro. Com um bom ensino da matemática, podemos sonhar com a construção de uma sociedade com menos pobreza e menos desigualdade, e com um desenvolvimento humano mais alto.

Este livro não trata apenas de problemas relacionados ao ensino da matemática no Brasil. Pelo contrário, ele enfoca soluções, em particular a experiência bem-sucedida do Círculo da Matemática do Brasil, projeto do Instituto TIM que nasceu de uma vivência minha e de meu esposo durante uma licença de estudo sabática na Universidade de Harvard, em 2012. Matriculamos nossa filha, que então tinha 5 anos, no afamado *Math Circle* de Harvard, coordenado pelos professores Bob e Ellen Kaplan. Assim, nas aulas semanais no Science Center da Universidade, vimos a forma surpreendente como crianças pequenas "faziam" matemática, com uma abordagem pedagógica participativa, cooperativa e lúdica, descobrindo e se apropriando de conceitos complexos como frações e números negativos com total facilidade e naturalidade, bem como com muita empolgação. Nossa volta ao Brasil coincidiu com a fundação do Instituto TIM, com sua missão de apoiar a democratização do conhecimento, da ciência e da tecnologia para o desenvolvimento humano no país. O alinhamento da experiência do *Math Circle* com a criação do Círculo da Matemática do Brasil foi imediato, e o projeto teve a felicidade de contar com a participação ativa dos professores Kaplan, assim

como do professor Steve Kennedy, na condução das atividades e na capacitação dos educadores brasileiros.

O projeto segue um modelo com duas linhas de atuação principais: aulas para crianças de escolas públicas e formação para professores, organizadas em parceria com as Secretarias de Educação. Primeiramente, a cada ano, são selecionados 50 educadores, de todas as partes do Brasil, os quais são capacitados para liderar aulas com a abordagem do Círculo da Matemática. Os educadores ministram aulas de uma hora por semana para grupos pequenos, de sete a dez estudantes dos primeiros anos do ensino fundamental. Na segunda linha de atuação, um grupo de educadores compartilha com professores de escolas públicas de todo o Brasil, em encontros de formação, a abordagem pedagógica. Os educadores desenvolveram a capacidade de aprender juntos e de auxiliar uns aos outros em seu trabalho individual, formando uma verdadeira equipe e uma excelente rede interna de apoio. Essa equipe de educadores constitui um valioso capital humano que sempre será um grande legado do projeto. Para saber mais sobre o funcionamento do Círculo da Matemática do Brasil, consulte nosso *site*: <www.ocirculodamatematica.com.br> .

Desde o início, tivemos como referência o trabalho desenvolvido pela Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO) no Brasil, e foi natural que prosseguíssemos com a ideia de uma publicação conjunta como continuidade das conversas que tivemos com a Rebeca Otero Gomes, coordenadora do Setor de Educação, que contribuiu para a formação de massa crítica do projeto e na série de palestras públicas organizadas anualmente pelo Instituto TIM, denominadas "E se as crianças gostassem de matemática?" O fato é que se entra na escola gostando de matemática, mas, ao longo do tempo, perde-se o encanto com a matéria, e a magia se transforma em um pesadelo durante o resto da vida acadêmica de milhões de crianças e jovens. Uma maneira diferente de ensinar matemática, que promova o gosto por essa ciência, o raciocínio lógico e a construção e a apropriação do conhecimento matemático com confiança, fortalecendo a autoestima dos estudantes, pode atenuar problemas como o abandono escolar de crianças e jovens e a baixa autoestima de meninas perante a matemática – e, assim, contribuir para que as crianças com menos apoio familiar não sejam deixadas para trás. Nesse contexto, a presente obra é um tributo a todos os que acreditam que a liberdade dessas crianças e desses jovens pode

ser conquistada com o desenvolvimento promovido por um melhor processo de ensino e aprendizagem da matemática no país.

O livro é estruturado em cinco partes. Na primeira, temos duas reflexões-chave sobre o ensino da matemática no país, oferecidas por dois renomados professores pesquisadores que são referência na educação matemática no Brasil. Essas reflexões são complementadas por uma análise dessa modalidade de educação no país, em termos pedagógicos e de aprendizagem no difícil contexto em que se encontram as escolas públicas brasileiras. Considerando os diagnósticos e a caracterização da situação problemática da matemática no Brasil, procede-se a uma busca por soluções, tratando-se primeiramente da abordagem do *Math Circle*, com artigos de colaboradores internacionais e, depois, na quarta parte, com uma discussão sobre a avaliação de impacto das atividades e das temáticas levantadas pelo Círculo da Matemática do Brasil. A última parte do livro dá voz a educadores e educadoras do Círculo, que contam, por meio de suas histórias, suas dificuldades e alegrias na implementação de um projeto dessa natureza, que luta pela melhoria concreta do desenvolvimento humano das crianças do país.

O Círculo da Matemática não deseja reinventar a roda. O projeto confere ênfase à humanização do ensino da matemática, materializada por meio de sua abordagem pedagógica. Desse modo, ele pretende contribuir para um esforço coletivo, já realizado por inúmeros outros projetos e iniciativas, para a melhoria do ensino da matemática no Brasil. A realidade educacional brasileira é demasiadamente complexa e diversa para permitir apenas um modelo de ensino. É assim, respeitando a diversidade e procurando contribuir para a promoção de uma ampla gama de soluções, que este livro convida todos a pensarem sobre o ensino da matemática no país, a partir de uma experiência prática e de um compromisso concreto em prol do desenvolvimento humano no Brasil.

Parte 1

Matemática e a educação matemática

Da educação matemática e sociedade à educação matemática e a civilização sustentável: uma ameaça, um apelo e uma proposta

Ubiratan d'Ambrosio

> **"Inundações e incêndios e convulsões e avalanches intervêm entre as grandes e glamorosas civilizações da humanidade. Mas nada, jamais, poderá impedir a humanidade e o potencial humano de evoluir a algo magnífico a partir de um caos renovado".**
> D.H. Lawrence, "Fantasia of the Unconscious", 1922

Ao longo de minha carreira, eu me preocupei com a justiça social. Em 1993, expressei minhas preocupações com a sobrevivência da civilização na Terra, com dignidade para todos:

> Embora a principal preocupação desta reunião seja a educação matemática, eu acredito estar autorizado a subordinar os meus comentários a um objetivo maior: a sobrevivência da civilização na Terra com dignidade para todos. E não se trata de meros jargões. O mundo está ameaçado, não só por agressões contra a natureza e o meio ambiente. Estamos igualmente preocupados com o aumento de violações à dignidade humana. Enfrentamos mais e mais casos da vida subordinada ao medo, o ódio e a violação dos princípios básicos sobre os quais repousa a civilização (D'AMBROSIO, 1993).

As preocupações expressam a nossa crítica sobre o que está acontecendo nas escolas, de práticas discriminatórias e intolerância. Infelizmente, em alguns casos, esse comportamento é tolerado e até mesmo estimulado pelos professores, pelos administradores e pelos pais. Muito tem sido dito e pesquisado sobre essa situação. A matemática é uma questão central na situação deplorável das escolas, que afeta especialmente as minorias, mas também grandes setores de toda a população. Agora, a situação é ainda mais prejudicial, por causa das rápidas mudanças no padrão demográfico dos grandes centros urbanos. Os artigos do MES 8, e mesmo de edições

anteriores do MES, mostram que esse é um foco urgente de nossas preocupações e requer ação da nossa parte.

No entanto, cada vez mais, eu percebo que há um foco ainda mais urgente para os educadores, em particular para os educadores matemáticos. Nossas práticas como educadores visam a um futuro sem fanatismo, sem ódio, sem medo e com dignidade para todos. Porém, pode não haver qualquer futuro. Nossa existência, como espécie, está ameaçada. Os nossos objetivos devem ser ainda mais amplos do que a justiça social e a dignidade da espécie humana – a sobrevivência da nossa espécie está ameaçada por um colapso social, como é fortemente expresso por Martin Rees:

> As principais ameaças à existência humana sustentável agora vêm de pessoas, não da natureza. Choques ecológicos que irreversivelmente degradam a biosfera poderiam ser desencadeados pelas exigências insustentáveis de uma crescente população mundial. As pandemias que se espalham rapidamente causariam estragos nas megacidades do mundo em desenvolvimento.
>
> E as tensões políticas provavelmente resultam da escassez de recursos, agravada pelas alterações climáticas. Igualmente preocupantes são as desvantagens imponderáveis das poderosas e novas tecnologias cibernéticas, biotecnologias e nanotecnologias. Na verdade, nós estamos entrando em uma era em que alguns indivíduos poderiam, através de erro ou do terror, provocar um colapso social (REES, 2013).

D.H. Lawrence nos inspira com a esperança de que haverá um futuro magnífico para as novas gerações, com justiça social e dignidade para todos. A matemática é uma ferramenta poderosa para alcançar esse futuro.

A ameaça

Estou impactado pelos resultados das pesquisas de diversas áreas científicas e por alertas de eminentes analistas do cenário mundial. O matemático Mikhail L. Gromov, laureado com o Prêmio Abel em 2009, diz:

> A Terra ficará sem os recursos básicos e não podemos prever o que vai acontecer depois disso. Vamos ficar sem água, ar, solo, metais raros, para não mencionar petróleo. Tudo chegará, essencialmente, à escassez no prazo de 50 anos. O que vai acontecer depois disso? Estou assustado. Pode ficar tudo bem se nós encontrarmos as soluções, mas caso contrário, tudo pode chegar a um fim muito rapidamente. A matemática pode ajudar a resolver o problema, mas se

> não formos bem-sucedidos, não haverá mais matemática, estou com medo (GROMOV, 2010).

O eminente cientista Martin Rees, como citado acima, também nos alerta para o colapso social. Ambos são estudiosos altamente respeitados, e seus alertas devem ser levados a sério.

Em 2011, Christiane Rousseau, então vice-presidente da Comissão Executiva da União Matemática Internacional (*International Mathematical Union* – IMU), fala sobre o crescente interesse na ciência da sustentabilidade e a atenção que o IMU está dedicando a isso, como resposta a um apelo do Conselho Internacional para a Ciência (*International Council for Science* – ICSU). Ela diz:

> Embora não seja novidade que os cientistas estão envolvidos no estudo das alterações climáticas e questões de sustentabilidade, um novo sentimento de urgência se desenvolveu. Os sinais de alerta são cada vez mais numerosos de que são necessárias medidas urgentes se queremos salvar o planeta de um futuro desastroso, já que podemos não estar longe de um ponto sem volta: a mudança climática com eventos climáticos mais extremos, elevação do nível do mar com o derretimento das geleiras, escassez de alimentos e água em um futuro próximo, devido ao aumento da população mundial e as alterações climáticas, perda de biodiversidade, novas epidemias ou espécies invasoras etc. (IMU-NET , 2011).

Juntando todos os alertas e relatórios, bem como as sérias preocupações dos órgãos científicos responsáveis, prevemos uma situação de caos, da qual nós, como educadores, devemos evoluir para uma civilização sustentável, com a paz em toda a sua dimensão (individual, social, ambiental e militar) e as sociedades com justiça e dignidade para todos. Porém, o currículo de matemática ignora as questões críticas que ameaçam a sobrevivência da civilização.

O apelo

Nos anos 1950, o mundo foi ameaçado por um conflito nuclear devastador, como consequência do contexto político da chamada Guerra Fria. O Relógio do Juízo Final, do Boletim de Cientistas Atômicos, chegava perto da meia-noite.[1]

O momento extremamente perigoso para a sobrevivência da civilização levou os eminentes cientistas Bertrand Russell e Albert Einstein a escreverem, em 1955, um

1 Esta ameaça foi dramatizada no filme antológico de Stanley Kubrick, *Dr. Fantástico* (*Dr. Strangelove*), de 1964.

Manifesto, que foi endossado por estudiosos de todo o mundo. Esse documento ficou conhecido como o "Manifesto Pugwash".[2]

Todas as considerações do *Manifesto* sintetizam a loucura perigosa de ser filiado e lutar por um credo ou uma ideologia. Fiquei muito impressionado com o apelo no seguinte parágrafo:

> Tentaremos não dizer qualquer palavra que apele para um grupo em detrimento de outro. Todos, igualmente, estão em perigo, e, se o perigo é compreendido, há esperança de que eles podem coletivamente evitá-lo. Temos de aprender a pensar de uma maneira nova (RUSSEL; EINSTEIN, 1955).

É impossível negar que precisamos de um novo pensamento dentro da educação matemática. A maioria das propostas de novos currículos visando à justiça social ainda insiste em ensinar as disciplinas tradicionais, principalmente originadas mais de um século atrás. O mesmo aconteceu com o Movimento da Matemática Moderna, das reformas pós-Segunda Guerra Mundial, que não passaram de um rearranjo de disciplinas clássicas. A nova e poderosa matemática, desenvolvida durante a Segunda Guerra – lamentavelmente para a destruição, mas potencialmente forte para fins pacíficos – não foi incorporada aos movimentos da matemática moderna dos anos 1950. Os conteúdos eram, como ainda são, encadeados para preparar os estudantes para mais e mais conteúdo. Esse objetivo propedêutico era justificado pelas teorias cognitivamente insustentáveis. Como isso estava relacionado com a realidade cotidiana dos estudantes e das comunidades?

A preocupação dos matemáticos para atualizar suas prioridades é bem expressa por David Hilbert:

> A história nos ensina a continuidade do desenvolvimento da ciência. Sabemos que cada época tem seus próprios problemas, que na era seguinte são resolvidos ou colocados de lado, como sem interesse, e substituídos por novos problemas (HILBERT, 2003, p. 5).

Nós, educadores matemáticos, devemos tomar essa observação de David Hilbert como um apelo para pensar de uma nova maneira. A mesmice não melhora o mau estado da educação matemática. Peço atenção especial para a ilusão perigosa de que melhores resultados na avaliação e em testes são relevantes para a verdadeira qualidade da educação.

2 O nome Pugwash vem da aldeia, no Canadá, onde o *Manifesto* foi aprovado pela primeira vez por 17 cientistas, laureados com o Prêmio Nobel. Os cientistas que primeiro endossaram o *Manifesto* decidiram se reunir a cada ano para refletir sobre o estado do mundo e propor medidas para melhorar o cenário global, para assegurar a paz em suas quatro dimensões: militar, ambiental, social e individual. As reuniões anuais são as Conferências Pugwash.

As importantes inovações na educação da matemática não estão produzindo resultados significativos. Os resultados das avaliações nacionais e internacionais de grande escala são desanimadores, ainda que seja possível identificar alguns focos de excelência. No entanto, como alcançar os tomadores de decisão, ou seja, como transmitir matemática relevante para um grande setor da sociedade?

Esse é um desafio que deve ser enfrentado em estreita cooperação de matemáticos e educadores matemáticos. Mais uma vez, citando Gromov na mesma entrevista,

> É uma questão muito difícil, porque temos de projetar ideias matemáticas para as pessoas que trabalham muito longe da matemática – para as pessoas que tomam decisões na sociedade (GROMOV, 2010).

Eu vejo como o principal problema obter uma estrutura de narrativa e uma linguagem acessível a outros especialistas e para a população como um todo, mantendo padrões rigorosos, mas não necessariamente o rigor dominante na "gaiola epistemológica" da matemática.

Durante alguns anos, tenho utilizado o conceito de "gaiola epistemológica" como uma metáfora para descrever sistemas de conhecimento. O conhecimento tradicional é como uma gaiola de pássaros. As aves que vivem na gaiola são alimentadas com o que está na própria gaiola, elas voam apenas no espaço da gaiola, elas veem e sentem apenas o que as grades da gaiola permitem. Os pássaros na gaiola se comunicam por meio de uma linguagem adequada para aqueles que vivem na gaiola, eles se reproduzem e procriam, eles se repetem. Eles não podem ver a cor exterior da gaiola. Uma situação semelhante pode acontecer com os estudiosos especializados. Os estudiosos na gaiola desenvolvem seu próprio jargão e aderem a padrões metodológicos e ontológicos rigorosos. Superar a mesmice acadêmica é um grande desafio. É frequente ver pesquisadores subordinando os seus estudantes a temas propostos pelos orientadores, restringindo o seu espaço para a criatividade. A metáfora da "gaiola epistemológica" é a antítese da Casa de Salomão, da obra utópica "Nova Atlântida" (1627), de Francis Bacon, e semelhante à Torre de Marfim na história e filosofia da ciência.

Vejamos um pouco mais de Gromov:

> Eu não apenas me concentraria em matemática, mas na ciência e na arte e tudo o que pode promover a atividade criativa em jovens. Quando isso se desenvolve, podemos ter alguma influência, mas não antes disso. Estando dentro da nossa Torre de Marfim, o que podemos dizer? Estamos dentro desta Torre de Marfim e estamos muito confortáveis. Mas nós realmente não podemos dizer muito, porque não vemos bem o mundo. Temos que ir para fora, mas isso não é tão fácil (GROMOV, 2010).

A proposta

A criatividade é o ponto-chave. Precisamos de novas ideias, de novas abordagens, para enfrentar os problemas que afetam o mundo. A nossa geração e as nossas abordagens não estão produzindo as mudanças globais para evitar o desastre total. Precisamos permitir que as novas gerações pensem de uma nova forma.

Para isso, precisamos de uma nova concepção de *rigor*, em que a integração de todas as ciências e outras formas de conhecimento, incluindo a matemática, possa ser materializada de forma espontânea, sem traumas de natureza epistemológica. Isso exige coragem e audácia. Imre Lakatos observou que os cientistas devem ser ativistas revolucionários, caracterizados como aqueles que acreditam que os quadros conceituais podem ser desenvolvidos e substituídos por outros melhores. Lakatos faz uma espécie de *mea culpa* filosófica, dizendo que: "Nós somos os únicos que criam nossas prisões e podemos também, criticamente, demoli-las" (LAKATOS, 1978, p. 20).

O domínio de técnicas de efeitos visuais revolucionários, por exemplo, que utilizam imagens e personagens realistas, gerados por computador, é o domínio de jovens equipados com *softwares* acessíveis, especialmente jogos, que lhes permitem criar cenários fantásticos, frutos da fantasia e da criatividade.

A escola deve ser um espaço não apenas para instrução, mas principalmente para a socialização e para a crítica do que é observado e sentido na vida cotidiana. Isso pode estimular a criatividade, levando a uma nova forma de pensar.

Esses comentários vão além do conhecimento científico e da educação. O mesmo ocorre na religião, nas artes, na linguagem, no governo, na economia e em outros campos da atividade humana. Um exemplo simples é a evolução das modalidades esportivas nos Jogos Olímpicos, uma evolução de uma atividade social que teve origem na Grécia Antiga.

Estamos experimentando uma rápida degradação social e ambiental. Um problema grave é a perda de credibilidade do conhecimento acadêmico, o que é evidenciado pelo surgimento de propostas alternativas em muitos setores que estão sob controle normativo estrito, como a saúde, as religiões, a política e a economia, bem como a rejeição de valores no comportamento das pessoas e no exercício da cidadania. Isso afeta profundamente os estudantes de quem desejamos atenção em nossas salas de aula. Isso afeta a sua confiança no conhecimento acadêmico, pois é evidente a incapacidade que as gerações anteriores têm de lidar com problemas centrais que afetam a humanidade atualmente.

A rejeição de comportamentos e práticas orientados por valores e o desafio à cidadania podem ser relativamente espontâneos, como as manifestações de protesto e os atos de vandalismo; mas também podem ser planejados, como as práticas de terrorismo e de crime organizado, que têm códigos de comportamento rigorosos e metas bem definidas. Os cenários dos romances de Ian Fleming, que mostram as forças governamentais, simbolizadas pelo Agente 007, que enfrenta o Dr. No, Goldfinger e outros líderes intelectualmente bem preparados, orientam os grupos materialmente muito bem equipados do terror e da criminalidade. Os cidadãos comuns, principalmente jovens, são observadores e vítimas desses confrontos e podem hesitar sobre que lado escolher. Ambos, governos e organizações terroristas e criminosas, têm discursos convincentes.

Os cidadãos comuns, principalmente jovens, revelam impaciência e desconfiança, o que pode resultar no niilismo ou na expectativa de recompensa sobrenatural. Isso me faz lembrar dos fenômenos sociais das *danses macabres* (danças da morte), na Idade Média, que eram reconhecimentos implícitos de "nenhuma esperança" e da impotência das estruturas sociais estabelecidas, tais como a religião e a governança, para impedir a propagação da peste bubônica. Um fenômeno similar é visto em nossas sociedades, com o surgimento e o crescimento, desde o início do século XXI, de grupos não estruturados, como o *Anonymous*. Esses grupos são bem estudados pela antropóloga cultural Gabriella Coleman em seu livro *Hacker, Hoaxer, Whistleblower, Spy*: the many faces of anonymous, publicado pela Verso, em 2014. O historiador da ciência James Gleick deu o título de Os jovens dos becos sem saída a um provocante ensaio sobre o livro (GLEICK, 2014). Nós provavelmente temos, entre nossos estudantes, muitos dos *jovens nos becos sem saída*. Geralmente, eles são altamente criativos e muito versados em todos os aspectos das tecnologias de informação e comunicação (TIC) e são observadores argutos do estado da sociedade e do mundo. Alguns podem estar dispostos a jogar o jogo *Quintet*[3].

Os educadores de matemática devem estar cientes da dramática perspectiva que a humanidade encara, assim como devem ter cuidado quando seus estudantes aprendem como jogar bem jogos matemáticos, que estão implícitos nos currículos, mas que não revelam qualquer pensamento ético. A matemática é, provavelmente, a disciplina localizada o mais distante da ética humanitária geral, preocupando-se apenas com a ética do rigor, característica da área. Estamos preparando os jovens para o sucesso, para serem bem-sucedidos em engenharia – mas muitos irão desenvolver armas mortais – e em economia – mas muitos irão aperfeiçoar o jogo financeiro desumano que apoia

3 Jogo matemático de sobrevivência, central no filme *Quinteto* (*Quintet*), de Robert Altman, de 1979.

o capitalismo, e alguns podem se tornar CEOs de empresas –, mas a maioria deles será cooptada como massa de manobra, ingênua, de governo e de grandes empresas – atuando como *blade runners* para a classe dominante (D'AMBROSIO, 2011, p. 121-148).[4]

O ensino atual carece de pensamento crítico e oferece oportunidades limitadas para a pessoa ser criativa e propor novos modos de pensamento. Do ponto de vista cognitivo, o ensino atual ignora o fato de que cada indivíduo tem muito conhecimento, a partir de diferentes fontes: componente genético (ainda pouco explicado), experiências acumuladas desde o nascimento (mesmo no estágio uterino) e ao longo da vida. Tudo isso, que está associado às tradições, incluindo explicações mitológicas e culturais em geral, constitui o amplo conhecimento pessoal de cada indivíduo, que está em constante transformação. A dinâmica de encontros culturais é um fator importante para essa transformação. O amplo conhecimento pessoal são as estratégias de sobrevivência e transcendência.

A vida é caracterizada por estratégias para sobreviver – todos os comportamentos e ações básicas, visam a "como" sobreviver –, que é comum a todas as espécies, e para transcender – entender e explicar fatos e fenômenos, indo além da sobrevivência e perguntando-se "por que" –, que é um traço único do gênero *Homo*. As estratégias de sobrevivência e de transcendência são produzidas por cada indivíduo e, graças à sociabilidade e à comunicação, são compartilhadas e socializadas com os outros em um grupo, e constituem a cultura desse grupo.[5] Tudo isso é ignorado na abordagem tradicional, mecanicista, da educação matemática.

Nos anos 1970, eu propus o Programa Etnomatemática, que é um programa de pesquisa em história e filosofia da matemática, com implicações pedagógicas (D'AMBROSIO, 1985, p. 44-48). A essência do programa consiste em lidar com situações reais e problemas recorrentes ao conhecimento acumulado dos indivíduos, como mencionado nos parágrafos anteriores. Para trazer isso para as escolas, existe um duplo desafio dos *conteúdos* e dos *métodos*: estes são inseparáveis. René Descartes deixou isso bem claro. Os métodos para a ação pedagógica no Programa Etnomatemática contavam com conteúdos abrangentes que tivessem sido acumulados por um indivíduo, como discutido acima. Os conteúdos da educação matemática tradicional são um arranjo engessado de teorias e técnicas desenvolvidas e acumuladas em ambientes acadêmicos, em "gaiolas epistemológicas" e em "torres de marfim". Na educação tradicional da matemática, a organização pode mudar dentro do sistema matemático, à procura

4 Veja também: <http://en.wikiversity.org/wiki/Nonkilling_Mathematics>.
5 Essas questões sobre o conhecimento são discutidas no clássico dilema "natureza *versus* criação".

de atalhos e de novas organizações e aplicações de técnicas e teorias. Os professores tentam contextualizar os conteúdos por meio de problemas formulados em termos da vida real; porém, são situações artificiais, criadas para dar a impressão de que a matemática lida com situações reais, mas na verdade apenas produzem uma realidade artificial para facilitar o processo de ensino. O que podemos chamar de situações e problemas "realmente reais" estão lá, à espera de serem reconhecidos e tratados pelas pessoas, de forma individual *ad hoc*. Isto foi claramente discutido por Descartes no

Discurso do método. As formas *ad hoc* para lidar com fatos e fenômenos, situações e problemas, podem evoluir para processos individuais, compartilhados e socializados e, assim, tornarem-se *métodos*. Tudo isso é muito dinâmico, ocorrendo em diferentes níveis de compreensão.

Quero esclarecer que as situações e os problemas "realmente reais" estão relacionados a fatos e fenômenos como estes são percebidos pelos indivíduos, de acordo com suas estruturas sensoriais e mentais. Eu entendo a realidade como tudo de material (artefatos) que existe, existiu ou existirá, além *mentefatos*, que são o imaginário, as ilusões e as desilusões, os sonhos e as crenças, mesmo a ficção, que pertencem à mente de cada indivíduo. Os *mentefatos* são acessíveis e informam apenas o indivíduo que os produziu, enquanto os artefatos são acessíveis e informam muitos indivíduos, por meio dos sentidos e da comunicação (D'AMBROSIO, in print). Um papel importante da educação, em um sentido muito amplo, consiste em ajudar as pessoas a produzirem artefatos, que são captados por outros, a partir de *mentefatos*, que são exclusivos de quem os gerou. Esse é o passo para a comunicação. Exemplos disso incluem aprender a falar, a desenhar, a contar, a escrever e assim por diante. Na verdade, esses são os passos evolutivos iniciais de cada criança, bem como os passos evolutivos das espécies do gênero *Homo*.

Como trazer tudo isso para as escolas formais e informais? Nos anos 1990, propus um novo conceito de currículo, um novo *trivium*, estruturado para fornecer capacidades críticas de comunicação, a capacidade crítica de lidar com símbolos, e a análise e a familiaridade com a tecnologia. Eu chamo essas três vertentes, respectivamente: *literacia*, *materacia* e *tecnoracia*. São neologismos criados por mim, com significados muito especiais, como explicarei adiante.[6]

A *literacia* é a capacidade crítica para se comunicar. Ela vai além da leitura, da escrita e da contagem. Inclui também a competência da *literacia* para os números, o que significa as operações, bem como a construção e a interpretação de gráficos, tabelas e

6 Esta proposta foi um artigo de discussão apresentado no MEAS 1, de 1999, como a Conferência Memorial de Paulo Freire. Ver também: D'AMBROSIO, 1999.

outras formas de informar outros indivíduos. Inclui também o conhecimento da língua condensada dos códigos. Hoje em dia, essas competências têm muito mais a ver com chaves, visores e telas do que com lápis e papel. Não há nenhuma maneira para reverter essa tendência, da mesma forma que não havia censura bem-sucedida para impedir que as pessoas tivessem acesso a livros nos últimos 500 anos. A obtenção de informações pelos novos meios precede o uso de lápis e papel, assim como a alfabetização dos números. Os tradicionais atos de *ler, escrever* e *contar* devem, atualmente, ir além de lápis, papel e tabuada: devem incluir calculadoras, computadores, *tablets* e telefones celulares.

A *materacia* é a capacidade crítica de retirar conclusões a partir dos dados, inferindo, propondo hipóteses e desenvolvendo conclusões. É um primeiro passo no sentido de uma postura intelectual, que está quase completamente ausente em nossos sistemas escolares. Infelizmente, mesmo admitindo que a resolução de problemas, a modelagem e projetos podem ser vistos em algumas salas de aula de matemática, a importância principal é atribuída aos números, ou à manipulação de números e operações. A *materacia* é mais próxima da forma como a matemática estava presente na Grécia Clássica, em outros sistemas culturais da Antiguidade e nas culturas indígenas. A preocupação da *materacia* não se restringia à contagem e à medição, mas incluía a mitologia, a adivinhação e a filosofia. Uma visão crítica da história mostra que a *materacia* incorpora uma reflexão mais profunda sobre o ser humano e o cosmos, sobre o ser humano e a natureza, sobre o ser humano e a sociedade, e não pode ser restrita a uma elite chamada "intelectual", como ocorreu no passado. Agora, a civilização moderna pede que esse conceito amplo esteja presente nas salas de aula de todas as faixas etárias, bem como na cidadania em geral.

A *tecnoracia* é a familiaridade crítica com a tecnologia. Claro, seus aspectos operacionais são, na maior parte dos casos, inacessíveis aos indivíduos leigos. Porém, as ideias básicas por trás dos dispositivos tecnológicos, suas possibilidades e seus perigos, e a moralidade que apoia o uso da tecnologia são questões essenciais que devem ser levantadas entre as crianças em uma idade muito precoce, nas salas de aula de todas as faixas etárias e para os cidadãos em geral. A história nos mostra que a ética e os valores estão intimamente relacionados com o progresso tecnológico.

Essas três vertentes compõem um novo currículo *trivium*, que está intimamente relacionado com as propostas do Programa Etnomatemática.[7] Muitos vão questionar: "Mas onde estão os conteúdos tradicionais?" Eu acredito que esses conteúdos vão emergir como subprodutos do processo de fornecer tais recursos. Existem dúvidas

7 A questão é bem discutida em um artigo recente, de Milton Rosa e Daniel Clark Orey (ROSA; OREY, 2015).

sobre a eficácia da transmissão do conhecimento organizada de forma linear. Temos de reconhecer que os conteúdos organizados nos currículos tradicionais são obsoletos. A evolução dinâmica das disciplinas não pode ser encarada de forma tradicional. O conteúdo vai surgir a partir do acesso aos meios de comunicação, em várias formas (rádio, TV, jornais e, principalmente, a internet), a partir de discussões em sala de aula sobre questões e projetos relevantes. As minhas ideias sobre isso são inspiradas pelos nove capítulos da tradição chinesa, pela *educação realística da matemática* de Hans Freudenthal, pela *modelagem matemática e pelo método de projetos*.

Conclusão

Esta proposta fornece a oportunidade para que os estudantes identifiquem as principais ameaças à civilização planetária, e para que sejam criativos ao propor novos rumos para uma civilização sustentável.

Bibliografia

D'AMBROSIO, Ubiratan. Diversity and equity: an ethical behavior. In. ANNUAL MEETING OF THE NA CHAPTER OF PME, 15. Pacific Grove, 1993. *Proceedings…* Pacific Grove, CA: ERIC, 1993. (ERIC ED 372 917). p. 54.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Ethnomathematics and its place in the history and pedagogy of mathematics. *For the Learning of Mathematics*, v. 5, n. 1, p. 44-48, Feb. 1985.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Literacy, matheracy, and technoracy: a trivium for today. *Mathematical Thinking and Learning*, v. 1, n. 2, p.131-153, 1999.

D'AMBROSIO, Ubiratan. Mathematical modelling in education research and practice: cultural, social and cognitive influences. In: STILLMAN, Gloria Ann; BLUM, Werner; BIEMBENGUT, Maria Salett (Eds.). *International Perspectives on the Teaching and Learning of Mathematical Modelling.* London: Springer International Publishing AG, (in print).

D'AMBROSIO, Ubiratan. Non-killing Mathematics. In: PIM, Joám Evans (Ed.). Engineering Nonkilling: Scientific Responsibility and the Advancement of Killing-Free Societies. Honolulu: Center for Global Nonkilling, 2011.

IMU-NET: NEWSLETTER OF THE INTERNATIONAL MATHEMATICS UNION, n. 47, editorial, May 2011.

GLEICK, James. Today's dead end kids. *The New York Review of Books*, 18 Dec. 2014.

GROMOV, Mikhail L. Entrevista com Mikhail L. Gromov por M. Raussen & C. Skau. *Notices of the AMS*, v. 57, n. 3, p. 391-409, Mar. 2010.

HILBERT, David. Problemas matemáticos (trad. do orig. de 1900 por Sergio R. Noble). *Revista Brasileira de História da Matemática*, v. 3, n. 5, p. 5-12, 2003.

LAKATOS, Imre. *The methodology of scientific research programmes.* Cambridge: Cambridge University Press, 1978. (Philosophical Papers, 1). p. 20.

REES, M. Editorial. *Science,* v. 339, 08 Mar. 2013.

ROSA, Milton; OREY, Daniel Clark. A trivium curriculum for mathematics based on literacy, matheracy, and technoracy: an ethnomathematics perspective. *ZDM Mathematical Education*, Springer, 2015.

RUSSEL, Bertrand; EINSTEIN, Albert. *Manifesto*. Pugwash, 1955. Disponível em: <http://pugwash.org/1955/07/09/statement-manifesto/#more-1784>.

Os movimentos da matemática na escola, 1890-1990

Wagner Rodrigues Valente

Introdução

Este texto tem como objetivo analisar, em escala macro, a trajetória da matemática na escola. A análise leva em consideração as tendências pedagógicas, os modos de pensar a condução da educação em diferentes períodos históricos. Em especial, para a matemática na escola, a categoria de *movimento* se mostra como um elemento conveniente para a análise em perspectiva histórica que é realizada a seguir. Idas e vindas, não repetitivas, mas incorporando inovações e preservando determinados temas, têm constituído a matemática na escola. Em síntese, movimentos, isto é, *ações coletivas* que mobilizam ideias, concepções, práticas e modos de ver a matemática na escola podem ser lidos neste período de cem anos.

Antes da análise sobre a matemática na escola propriamente dita, cabe uma leitura de como pensadores da educação veem as marchas e contramarchas da pedagogia na história.

Um estudo que nos parece esclarecedor, do ponto de vista de uma síntese mais abrangente sobre as pedagogias, é o escrito por Nathalie Bulle, intitulado "O pensamento pedagógico moderno: entre ciência e política" (BULLE, 2005). De acordo com a autora, é possível distinguir dois tipos de heranças presentes no pensamento pedagógico atual: um que é originário do racionalismo universalista das Luzes; e outro, que vem do naturalismo evolucionista do século XIX (BULLE, 2005, p. 117). Essa dupla herança revela uma contradição teórica que permeia todo o desenvolvimento das pedagogias que chegam até os nossos dias.

O que caracteriza cada um desses dois tipos? Segundo Bulle, o racionalismo universalista das Luzes tem como projeto educativo a autonomia da razão e do progresso intelectual. Por outro lado, o naturalismo evolucionista prega a autonomia da ação e do aperfeiçoamento moral (BULLE, 2005, p. 117).

As Luzes, o Iluminismo, engendraram um novo modelo educativo. O ícone desse modo de pensar a educação vem da Revolução Francesa. Um de seus maiores representantes é Condorcet. Para ele, o despotismo é resultado da ignorância do povo. Assim, as ciências e as artes devem se constituir como os pilares da liberdade. A educação deve ser vista como *instrução*, isto é, alicerçada nos *conteúdos de ensino*, nos *saberes*. Para tal, o número de disciplinas precisa ser aumentado. Os programas de ensino devem se centrar nas ciências naturais e humanas. A pedagogia passa a ser uma *pedagogia de cultura*. Considera-se, neste caso, muito mais a aquisição de conhecimentos do que o exercício de desenvolver o espírito culto (BULLE, 2005, p. 119).

O século XIX marcou uma ruptura com essa herança do Iluminismo. Rompe-se a tradição vinda, de fato, desde o idealismo platônico, reelaborado pelo racionalismo das Luzes, que passa a ser considerado intelectualista. Tal ruptura tem um profundo caráter político: depois da Revolução Francesa, com o episódio traumático do Terror, toma a cena a *liberdade individual*, que deveria ser alcançada por meio da harmonia social. Nesse contexto, a educação intelectualista não é mais vista como alinhada ao propósito de acesso a uma verdade única, integradora. E mais: a educação intelectualista perde as suas virtudes morais. A cultura vinda do intelectualismo enciclopedista passa a ser vista como tendendo a servir aos próprios interesses daquele que se instruía (BULLE, 2005, p. 120). Aí parece ficar mais bem caracterizada a distinção entre *instrução* e *educação*. A primeira é considerada herdeira do intelectualismo conteudista; a segunda, imersa em valores morais e adequada para a construção de uma nova sociedade.

Essas referências amplas de tratar a educação constituem bases, heranças que se articulam quando analisamos a matemática na escola. É possível dizer que a *educação* matemática nasceu junto com o que a história da educação considera a *modernidade pedagógica*, em um movimento que se alastrou internacionalmente no final do século XIX. Antes disso, prevalecia o *ensino* de matemática, intelectualista. E, somente nas décadas finais do século XX, tem-se a *educação matemática* e anuncia-se, em novas bases, um *ensino de matemática*. Termos com nomenclaturas próximas, que confundem o leitor? Talvez, mas são termos que indicam movimentos com perspectivas bem distintas sobre a matemática na escola, que podem ser lidos ao longo do tempo, sob a ótica de uma história globalizante, para este saber escolar tão internacional que é a matemática...

Do *ensino* de matemática para a *educação* matemática: o movimento modernizador

A partir da década de 1880, assistiu-se à emergência de uma verdadeira *contracultura pedagógica* vinda com o movimento da *pedagogia intuitiva*. Muito antes disso, foram plantados os gérmens dessa modernidade educacional. Iniciou-se a ruptura com o Iluminismo intelectualista. Essa modernidade aponta para a não coerção dos estudantes, para um modo diferenciado de conduzir a criança a seu estado adulto. Rousseau, Pestalozzi e Fröebel são autores que inspiram essa contracultura pedagógica, seus referentes mais importantes. As décadas finais do século XIX assistem, nos países da Europa, nos EUA e ainda no Brasil, à circulação da onda intuitiva como forma moderna de tratar as questões educacionais, inspirada pelos escritos desses autores clássicos.

Contra uma cultura estabelecida de considerar o *homúnculo* – a criança como ser humano em miniatura –, assenta-se a ideia de que a criança é um ser diferente, que está em processo de formação e apresenta estágios evolutivos no pensar e no agir. Contra um modo considerado antinatural de imposição e coerção de padrões, e mesmo de violência física, dissemina-se a necessidade de se trabalhar em consonância com o desenvolvimento infantil. Contra uma cultura chamada "livresca", com base em processos de memorização, estabelecem-se propostas para um ensino ativo. Enfim, uma verdadeira contracultura pedagógica. Além disso, essa contracultura se faz *método*: método intuitivo ou *lição de coisas* – modo como tal época é interpretada no Brasil.[1]

De forma mais específica, no âmbito dessa contracultura, os saberes escolares e sua forma de tratamento refletem a nova maneira de se pensar a educação. Os processos de memorização, combatidos, estavam relacionados ao saber considerado livresco: o saber escolar, colocado nos textos, expressava graus de abstração, de sistematização que, necessitando ser apropriados pelos estudantes, levavam à memorização. À cultura estabelecida, não haveria outro modo para os iniciantes se aproximarem do saber sistematizado nos livros, que não fosse por processos de memorização. Além disso, essa sistematização dos saberes, colocada nos livros, propunha sempre que os primeiros passos a serem dados em direção aos saberes mais avançados deviam ser encadeados em uma ordem lógica, em uma lógica interna própria aos conteúdos sistematizados. Essa ordem levaria os estudantes dos simples elementos de um saber aos seus termos mais complexos. Para a matemática na escola, em suma, estava presente uma tradição

1 Uma referência importante para o período diz respeito à tradução, adaptação e grande circulação que teve o livro "Primeiras lições de coisas", de Norman Allison Calkins, feita por Rui Barbosa, em 1886. A tradução da obra, entre outras coisas, fundamentou a tese defendida por Rui Barbosa de que a "lição de coisas" é um *método*, e não uma matéria independente do programa escolar (BARBOSA, 1946, p. 215-216).

inaugurada por Euclides (século III a.C.) de tratar os conteúdos de modo sintético, isto é, das partes conhecidas (os *a priori* – axiomas, postulados etc.) para as desconhecidas (o todo – os teoremas etc.). Esse é outro modo de se analisar o papel da memorização, para além de estudos que mostram que há falta de livros etc. e que o expediente para remediar tal situação recorre à memorização.[2] Considerando a necessidade de se incorporar a ordem lógica dos conteúdos, iniciando por seus elementos, que nada tinham de proximidade com a criança, a memorização é um processo inexorável. Nesse caso, emparelham-se, consideradas como semelhantes, duas ordens: a *ordem sistematizada do saber* (a lógica interna organizadora dos conteúdos) e a *ordem sequencial da aprendizagem* (dos elementos mais simples para as suas combinações, os termos mais complexos).

No entanto, tudo muda na perspectiva de uma nova cultura pedagógica, vinda como um movimento modernizador. As práticas relacionadas à memorização devem ser abandonadas em favor de métodos que contenham a participação ativa do estudante. A psicologia nascente passa a respaldar cada vez mais o argumento de que é necessário seguir o desenvolvimento do estudante, na sua ordem natural, para que o ensino seja eficiente. E essa ordem natural aponta para a *intuição sensível* da criança. É preciso considerar que a primeira forma de conhecimento é intuitiva. Circulam internacionalmente propostas de ensino intuitivo para todas as matérias escolares. E, por certo, a matemática na escola não está imune a essa onda intuitiva, a esse movimento modernizador...

Em suma: contra o ensino considerado livresco, de instrução, contrapõe-se o trabalho pedagógico que considera o desenvolvimento da criança, que necessita de educação. Contra o *ensino*, enfim, a *educação*. No caso da matemática, da matemática na escola, contrapondo-se ao ensino de matemática, a necessidade de uma *educação matemática*; mesmo se nessa época, a expressão *educação matemática* parece não ter sido, ainda, utilizada. De todo modo, a expressão *educação matemática* simboliza um movimento que faz frente ao *ensino de matemática*, entendido como "instrução matemática".

No âmbito desse primeiro movimento, o nome de Klein é emblemático. Felix Christian Klein (1849-1925), um dos mais importantes matemáticos do final do século XIX, teve papel fundamental na internacionalização dos estudos sobre a formação matemática das

2 Um dos raros estudos que buscam compreender o papel da memorização nas práticas educativas é o texto da professora Maria Cecília de Souza. De acordo com a autora, "a memorização mantinha, sem dúvida, relação com uma cultura que era profundamente oralizada, em que a Igreja fizera a escrita ser apresentada sob a perspectiva da oralização, que tanto tinha repercussões na cultura das elites urbanas, quanto na própria percepção popular, onde uma forma de catolicismo rústico deitara raízes profundas [...]". E, ainda, a memorização "vinha substituir muitas vezes, ou mesmo suprir, não a ausência de conhecimento de métodos de ensino, mas a raridade de livros, outras vezes, a ausência de conhecimento do conteúdo das próprias disciplinas" (SOUZA, 1998, p. 86-88).

novas gerações. Em 1908, Klein foi eleito no IV Congresso Internacional de Matemática, em Roma, presidente da Comissão Internacional de Instrução Matemática.[3]

O trabalho de Klein enfatiza uma mudança sobre o que poderia ser denominado "método da matemática":

> Numa comunicação à Academia de Ciências de Göttingen em 1895 sobre 'a aritmetização da matemática', referindo-se criticamente à tendência em estender o método weierstrassiano na matemática para além do domínio da aritmetização da análise e do que ela tem de positivo na fundamentação e investigação desta disciplina, Klein afirma de modo veemente que não é possível tratar a matemática exclusivamente pelo método lógico-dedutivo, sem dar lugar de relevo aos seus aspectos intuitivos e algorítmicos, comparando a ciência matemática a uma árvore que enterra cada vez mais em profundidade as suas raízes na terra e expande livremente os seus ramos no ar (RODRIGUES, 2009, p. vii).

Essa referência é fundamental, pois parte de um personagem importantíssimo na matemática do final do século XIX e figura de expressão internacional. Klein promoveu um embate decisivo quanto à imagem solidamente estabelecida da cultura matemática.[4] Tal representação dessa cultura, firmemente posta sobre os seus processos e métodos, está relacionada à prova lógico-dedutiva. E essa representação do fazer matemático também está presente, por certo, no ensino de matemática. Tal método da matemática, tal método do ensino da matemática. Ao que parece, ao advogar a ruptura com a forma hegemônica de conceber o método matemático como lógico-dedutivo, abre-se a possibilidade de se pensar que, ao invés do ensino por esse método, existem alternativas não consideradas anteriormente, que levam em conta a intuição. E, aqui, tal perspectiva transborda o nível primário e busca aliados no ensino secundário. Essa discussão, do final de século XIX e primeiros anos do século passado, coloca o ensino de matemática em destaque no próprio âmbito matemático, conduzida por Klein. Discursando para o público internacional, sua fala sobre o método da matemática irá circular por muitos países, ecoando no ensino de matemática e inaugurando processos que, mais adiante, irão conferir especificidade a esse ensino, face àqueles de todos os demais saberes escolares.

3 *Internationale Mathematische Unterrichtskommission* (IMUK) ou *Commission Internationale de l'Enseignement Mathématique* (CIEM). A partir de 1952, o IMUK passou a ser conhecido como *International Commission on Mathematical Instruction* (ICMI).

4 Em termos analíticos mais precisos, conviria utilizar o termo *representação* em lugar de *imagem*. Entenda-se aqui o termo *representação* como categoria de análise originária dos estudos do historiador cultural Roger Chartier. De pronto, cabe explicitar o que esse autor entende por *representação*: uma noção que articula três modalidades da relação com o mundo social – em primeiro lugar, o trabalho de classificação e delimitação que produz as configurações intelectuais múltiplas, por meio das quais a realidade é contraditoriamente construída pelos diferentes grupos; seguidamente, as práticas que visam a fazer reconhecer uma identidade social, exibir uma maneira própria de estar no mundo, significar simbolicamente um estatuto e uma posição; por fim, as formas institucionais e objetivas graças às quais certos "representantes" (instâncias coletivas ou pessoas singulares) marcam de forma visível e perpetuada a existência do grupo, da classe ou da comunidade (CHARTIER, 1990, p. 23).

Desde Felix Klein, as propostas para mudanças no ensino de matemática circulam por muitos países, na busca de uma nova reorganização de métodos e conteúdos. No Brasil, isso não é diferente. As ideias do matemático alemão sobre a unificação da matemática escolar inspiraram a primeira organização nacional curricular (Reforma Francisco Campos), com a criação do Ministério da Educação e Saúde Pública, por meio de estudos de Euclides Roxo[5].

Euclides Roxo empreendeu uma verdadeira cruzada no final dos anos 1930 para a realização de mudanças no ensino de matemática. Seus longos artigos publicados no "Jornal do Commercio", no Rio de Janeiro, buscavam responder críticas que a ele eram dirigidas e ampliar o debate a respeito de um novo modo de pensar o ensino de matemática. Tendo principalmente Felix Klein por referência, Roxo também destacava os aspectos relacionados ao método:

> Em uma das suas conferências sobre o ensino da matemática nas seis primeiras classes das escolas secundárias alemãs, dizia Klein: 'Não se deve, entretanto, entender que se comece, desde cedo, com uma exposição lógica e difícil, mas impõe-se completamente o método genético. A intuição forma a base do conhecimento e, a princípio, só lentamente se penetra na consciência da lógica' (ROXO, 1931).

Assim, a discussão sobre o *método da matemática* espraia-se para o *método de ensino de matemática*. Essa discussão enfatiza, principalmente, o ensino de matemática no curso secundário. Klein trata do ensino de matemática e faz propostas para os anos escolares que antecedem os cursos de nível superior. Dentre os seus objetivos está a melhor preparação matemática para os estudantes que ingressam nas universidades. No Brasil, o ensino secundário é altamente elitizado e passou por mudanças de seu público somente no início da década de 1970, com a ampliação da escolarização obrigatória (Lei n. 5.692/1971).

Com as ações de Euclides Roxo, principalmente, entrou em discussão o método de ensino da matemática para o curso secundário brasileiro, referenciado, desde 1837, pelo Colégio Pedro II. Roxo foi professor de matemática e diretor do Pedro II. Em tempos de

5 Euclides de Medeiros Guimarães Roxo nasceu no dia 10 de dezembro de 1890, em Aracaju, Sergipe. Faleceu no Rio de Janeiro, no dia 21 de setembro de 1950. Em 1909, bacharelou-se no Colégio Pedro II. Formou-se em engenharia em 1916 pela Escola Politécnica do Rio de Janeiro. Em 1915, foi aprovado em concurso para professor substituto de matemática no Colégio Pedro II. Posteriormente, em 1919, foi nomeado catedrático nesse estabelecimento de ensino e lá também foi examinador de francês, latim e matemática. Além disso, foi aprovado em concurso para catedrático do Instituto de Educação. No Colégio Pedro II, foi diretor de 1925 a 1935 (de 1925 a 1930 no externato, e de 1930 a 1935 no internato). Em 1937, foi nomeado diretor do Ensino Secundário no Ministério da Educação e Saúde. Foi membro do Conselho Diretor da Associação Brasileira de Educação (ABE), de 1929 a 1931, e fez parte da Comissão do Ensino Secundário da mesma associação, fundada na 2ª Conferência da ABE; foi presidente da Comissão Nacional do Livro Didático (VALENTE, 2004).

direção do estabelecimento (1925-1935), seu *status* igualava-se ao de um ministro da Educação. Daí a importância de seus discursos, de seus escritos e mesmo de seus livros didáticos.[6] E mais: estava em curso, ao que parece, um debate inédito – não basta ser um bom matemático para ser um bom professor de matemática.[7] Tal debate no Brasil colocou Euclides Roxo como pioneiro da educação matemática – modo de ensinar matemática que leva em conta o sujeito que aprende, e não somente a lógica interna de organização dos conteúdos.[8] Com isso, um novo profissional começa a ser forjado por meio de novos saberes, de saberes para ensinar matemática no ensino secundário, lugar historicamente relacionado às referências do ensino superior, desvinculado dos primeiros anos escolares (HOFSTETTER; SCHNEUWLY, 2009).

Da educação matemática para o ensino de matemática: uma matemática moderna

Os tempos eram de *estruturalismo* como método rigoroso de análise intelectual, que trazia grande esperança de fazer avançar temas científicos fundamentais. O estruturalismo como tratamento das relações entre as partes e o todo. A totalidade com prioridade lógica sobre as partes, e as relações sendo mais importantes do que as entidades que são vinculadas a elas. A estrutura oculta é sempre mais importante do que o evidente. O simbolismo como relevante, e não as entidades simbolizadas. Assim, o estruturalismo adquire *status* interdisciplinar e multidisciplinar na produção de conhecimentos na matemática, na filosofia, na linguística, na antropologia e na crítica literária. Transforma-se em filosofia dominante em meados do século XX, um momento particular da história do pensamento humano, um tempo forte da consciência crítica (DOSSE, 1992, p. 9).

As primeiras ideias que deram forma à revolução estruturalista começaram a germinar durante o período de entre-guerras, com os membros do Círculo Linguístico de Praga, cuja figura principal era o linguista russo Roman Jakobson. O termo *estrutura* começou

6 Em termos das obras didáticas de Euclides Roxo, é possível afirmar que o "Curso de mathematica elementar", lançado em 1929, constitui um livro pioneiro para o ensino secundário, no qual há o esforço de integração de aritmética, álgebra e geometria, em um texto que segue o modo intuitivo-analítico de apresentação dos conteúdos matemáticos.

7 Uma discussão mais detalhada sobre as ações e propostas de Euclides Roxo pode ser lida em Valente (2004).

8 Em tempos recentes, professores se mobilizaram para fazer aprovar o Dia Nacional da Matemática, 6 de maio, dia do nascimento do professor Julio Cesar de Mello e Souza (DOU de 26 de junho de 2013). Ao que parece, ocorreu um duplo equívoco: em primeiro lugar, a homenagem tinha como objetivo celebrar a matemática na escola, os seus processos de ensino e aprendizagem, a figura da docência em matemática, o profissional cuja identidade não é a mesma da do matemático. Nesses termos, o Dia Nacional da Matemática se desviou desse objetivo, em seu próprio título. Outro equívoco se refere à figura do homenageado. Estudos mostram que o conhecidíssimo Malba Tahan pouco tem a ver com as lides de renovação do ensino de matemática. Criativo, autor de dezenas de livros traduzidos para diversas línguas, Julio Souza nem de longe travou uma batalha árdua para modernizar a matemática na escola, nem se erigiu como profissional de vanguarda do ensino desse saber. Tal papel coube a Euclides Roxo. Julio Souza preferiu alinhar-se ao conservadorismo do ensino de matemática no curso secundário, em benefício da venda de seus livros. Estudos históricos mostram essas ações e podem ser lidos em textos como os de Valente (2004b).

a ser utilizado por esse grupo em 1929. Seis anos mais tarde, constituindo-se como um grupo de matemáticos, Bourbaki[9] se apropriou dele. O uso e a caracterização matemática da ideia de *estrutura* foram, em parte, responsáveis por sua adoção na psicologia. Jean Piaget interessava-se pela matemática e, assim, as ideias de Bourbaki lhe foram úteis. Piaget chegou à conclusão de que, em todos os estágios do desenvolvimento da inteligência das crianças, os processos de pensamento se organizam de forma muito estruturada, segundo noções matemáticas definidas com grande precisão por Bourbaki. Piaget considerava que as estruturas mentais que permitem que adolescentes e adultos pensem de forma lógica tomam como modelo estruturas matemáticas (ACZEL, 2009, p. 115-116 e 139).

Os marcos de aproximação da psicologia genética com a matemática estruturalista foram estabelecidos no encontro de Piaget com Dieudonné:

> Assim como André Weil e Claude Lévi-Strauss se encontraram em Nova York, Jean Piaget e Jean Dieudonné também estiveram em contato. Esta relação marcou profundamente a evolução da ciência, reforçando a influência exercida por Bourbaki no avanço do estruturalismo. A reunião teve lugar em abril de 1952 em um congresso de estruturas matemáticas e estruturas mentais celebrado nas imediações de Paris. Dieudonné deu uma conferência onde descreveu as três estruturas-mãe de Bourbaki: composição, proximidade e ordem (*estruturas algébrica, topológica e de ordem*). Em seguida, Piaget tratou das estruturas que havia descoberto para explicar a construção do pensamento das crianças. Para surpresa de ambos os conferencistas, ficou claro que tratavam do mesmo assunto. Pareceu óbvio que existia uma relação direta entre as três estruturas matemáticas estudadas por Bourbaki e aquelas inerentes ao pensamento operativo das crianças (ACZEL, 2009, p. 140).

Esse encontro parece ser emblemático. Porémm, antes e depois dele, outros eventos na Europa propiciaram discussões entre a matemática e a psicologia, nesses novos tempos estruturalistas. São seminários internacionais foram organizados pela *Commission Internationale pour l'Étude et l'Amélioration del Ensegnement des Mathématiques*. Em 1955, essa Comissão publicou, como obra coletiva, o texto "L'enseignement des mathématiques". Como autores estão "seis de seus membros fundadores: um psicólogo, um lógico matemático, três matemáticos profissionais e pedagogo das matemáticas" (PIAGET et. al. 1955, p. 5-7). Pela ordem: J. Piaget, E. W. Beth, J. Dieudonné, A. Lichnerowicz, G. Choquet e C. Gattegno. O primeiro

9 Nicolas Bourbaki é o nome de um grupo de matemáticos organizados em uma associação, na França, que tinha como objetivo, a partir de sua formação, em 1935, conduzir de forma rigorosa o ensino de matemática. Bourbaki é uma importante referência na organização estrutural das matemáticas. Jean Dieudonné (1906-1994) foi um dos membros mais ativos e produtivos do grupo. Dieudonné escreveu numerosas obras e foi um autor importante de história da matemática, campo em que contribuiu muito na consolidação de certa ortodoxia estruturalista (PATRAS, 2001, p. 6).

capítulo do livro intitula-se "Les structures mathématiques et les structures opératoires de l'intelligence". Tal texto constitui uma síntese da comunicação de Jean Piaget realizada no seminário de 1952.

Ao que tudo indica, esses seminários se tornaram em um ponto inicial e de apoio ao que veio em seguida, com amplo financiamento e divulgação internacional, com vistas à transformação da matemática escolar. Em 1959, a Organização Europeia de Cooperação Econômica (OECE) promoveu um inquérito relativo ao ensino de matemática em seus países-membros. Além do levantamento de informações, a OECE patrocinou um encontro para discutir os dados obtidos, com vistas à promoção de uma reforma curricular do ensino de matemática. De fato, ele foi realizado no *Cercle de Royaumont*, em Asnières-sur-Oise, França, com a duração de duas horas semanais e com a participação de cerca de 50 delegados de 18 países (GUIMARÃES, 2007, p. 21-22).

Ao final do que ficou conhecido como Seminário de Royaumont, houve uma proposta de reforma para o ensino de matemática, detalhada no ano seguinte, com a elaboração do texto "Un programme moderne de mathématiques pour l'enseignement secondaire".

Aproximadamente dez anos após a proposição de um programa moderno para a matemática escolar em nível secundário, ganhou divulgação um programa para o nível primário, para a escola elementar, para os primeiros anos escolares. Este, segundo seus autores, era resultado de pesquisas e experiências realizadas durante uma década, pelo *International Study Group for Mathematics Learning* (ISGML).[10] À frente da proposta, Zoltan Paul Dienes, que teve várias de suas obras traduzidas e utilizadas no Brasil.

Para o ensino do *sistema de numeração*, por exemplo, é preciso iniciar os ensinos com noções conjuntistas, diagramas de Venn ou de Carroll; *aritmeticamente*: trabalhar a aprendizagem dos números naturais a partir das noções de conjunto; *logicamente*: considerar as propriedades e os atributos dos objetos ou conjuntos de objetos; e *geometricamente*: considerar noções de topologia (DIENES et. al., 1969).

Conjuntos, conjuntos e mais conjuntos... Tais elementos se transformaram em ícones do movimento estruturalista para o ensino de matemática. E, mais precisamente, essa mobilização internacional fundou o que ficou conhecido como Movimento da Matemática Moderna (MMM). No Brasil, como em outros países, imprensa, professores e intelectuais aderiram às novas propostas para tratar a matemática na escola. Osvaldo

10 Centro de estudos responsável pela coordenação de grupos espalhados por diversos países, com o objetivo de desenvolver pesquisas sobre a forma de se obter uma compreensão universal da matemática, fundamentada na psicologia teórica e na pedagogia prática (DIENES, 1967, p. 9).

Sangiorgi foi uma figura emblemática, um personagem-símbolo do MMM em terras brasileiras. Autor reconhecidíssimo de livros didáticos, coube a ele e ao grupo que fundou, o Grupo de Estudos do Ensino da Matemática (GEEM) – de modo pioneiro, promover a institucionalização e a circulação de uma nova matemática, a *matemática moderna nas escolas*.

A análise em perspectiva histórica nos mostra que o MMM promoveu um retorno da educação matemática ao ensino de matemática. Isso é diferente do que ocorreu no movimento anterior, que promoveu um descrédito na ciência dos conteúdos matemáticos como forma suficiente para a boa pedagogia, fazendo emergir a educação matemática; nesse caso, reafirma-se a crença nos novos conteúdos matemáticos como ingredientes para o sucesso no trato da matemática na escola. Além disso, as questões pedagógicas ficam restritas à didática desses novos conteúdos, ao desafio de ensiná-los. Em outros termos, volta-se ao primado dos conteúdos e ao modo matemático de organizá-los para serem ensinados, independentemente dos sujeitos que aprendem e das condições em que aprendem. Em termos de análise ampla, ocorre um retorno ao *modo intelectualista*, em contraponto ao *modo educativo*. É o intelectualismo das Luzes, agora na forma de uma matemática moderna...

A modernidade da matemática escolar para crianças e adolescentes parece ter sido engendrada por caminhos que, de certo modo, apartam matemática e pedagogia. No encontro da psicologia com a matemática, a pedagogia parece ter sido a última a ser chamada no processo modernizador. Algo distanciado de outras matérias e disciplinas presentes na cultura escolar, ao que parece, o ensino da matemática moderna nas escolas constitui um "estranho no ninho" da cultura escolar desse tempo. Assim, é possível compreender a razão pela qual a historiografia da educação vem dando pouca importância à onda pedagógica estruturalista.

Do ensino de matemática para a educação matemática: a criação de um novo campo

Do ponto de vista da caracterização dos movimentos da matemática na escola – na educação básica (graus escolares que antecedem o ensino superior) –, seus constitutivos principais remetem aos conteúdos de ensino, à sua organização, aos modos de conceber como se ensina e como se aprende matemática, às finalidades do ensino de matemática, enfim...

As perspectivas para a matemática na escola se mostravam alvissareiras, projetadas pela verdadeira euforia internacional, vinda com o Movimento da Matemática Moderna. Esse movimento, em termos de conteúdos de ensino, pregava a verdadeira matemática praticada por matemáticos. Crianças e adolescentes teriam a possibilidade de aprender uma "matemática viva" – objeto de pesquisa matemática –, contrapondo-se à antiga matemática escolar – uma "matemática morta", não mais objeto de pesquisa dos matemáticos. E essa "matemática viva" se organizava para o ensino do mesmo modo que as estruturas cognitivas do aprendiz. A matemática moderna na escola constituiria um caminho natural da aprendizagem, uma perspectiva de que haveria "matemática para todos" – uma versão atualizada do ideário de Condorcet, da primazia intelectualista.

Com o passar do tempo, porém, o entusiasmo foi se arrefecendo, e as práticas cotidianas dos professores revelavam que as boas intenções do MMM não resultaram em modificações convincentes para o ensino e a aprendizagem. Concomitantemente, os debates nacionais e internacionais, em congressos científicos, anunciaram novas bases teóricas para os estudos sobre ensino e aprendizagem da matemática. Assim, a cultura escolar iniciou um processo de rejeição às propostas estruturalistas. Na realidade, um dos primeiros contrapontos ao MMM se estabeleceu com a publicação do livro que, em língua portuguesa, ganhou como título "O fracasso da matemática moderna", já em 1976, escrito por Morris Kline.[11] No entanto, nessa época, ainda não se ofereciam alternativas mais sólidas teoricamente; havia mais um tom de denúncia e uma argumentação ligada mais proximamente a uma espécie de retorno a tempos pré-MMM.

Os tempos de refluxo e abandono do Movimento da Matemática Moderna situam-se no final da década de 1980. Internacionalmente, nessa década, ocorreram momentos emblemáticos para uma nova era, para o nascimento de um novo movimento: o da *Educação Matemática*. No Brasil, cite-se a realização do I Encontro Nacional de Educação Matemática (ENEM), em 1987; e a criação da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM), em 1988.

Nos anais do I ENEM, é possível ler o anúncio de novas referências internacionais que se tornariam clássicas para a constituição do novo campo da educação matemática:

> Na aprendizagem, o que conta é o dinamismo pessoal de cada aluno, fundado na ausência de soluções a problemas, que pode ter como contexto um centro

11 Em 1973, foi lançado pela St. Martin's Press, de Nova York, o livro "Why Johnny can't add: the failure of the New Math", de Morris Kline, professor da *New York University*. No Brasil, a obra ganhou tradução para o português, três anos depois, com o título "O fracasso da matemática moderna", em um lançamento da Instituição Brasileira de Difusão Cultural S.A. (Ibrasa). De acordo com a essa editora, houve edições do livro até 1985. Para uma análise mais aprofundada do impacto da obra em seu tempo de circulação no Brasil, leia-se Valente (2008).

> de interesse, mas que necessita ser ativado na individualidade do processo de cada sujeito em face de algo a aprender. A possibilidade desta ativação repousa sobre o reconhecimento e o aproveitamento da caminhada personalizada de cada aluno na apropriação de um campo conceitual. [...] com Gérard Vergnaud, admitimos que as aprendizagens não se dão no abstrato das estruturações gerais do pensamento, como se julgou, ou ainda se julga, possível [...] (GROSSI, 1988, p. 23)

O trecho acima reproduz linhas do texto da professora Esther Pillar Grossi, que trouxe para os debates do I ENEM o conceito de "campo conceitual", que passou a orientar muitos estudos e pesquisas na educação matemática.

Essas novas perspectivas para se pensar a matemática na escola transbordam os meios estritamente acadêmicos e mobilizam a produção de novas referências para professores de matemática. Um exemplo disso é a elaboração da "Proposta curricular para o ensino de matemática: 2º grau" do estado de São Paulo, na qual é possível ler orientações como:

> A participação do aluno na elaboração de seu conhecimento é um dos pontos fundamentais da concepção atual de aprendizagem. Esta participação deve, porém, ser orientada tendo em vista os conceitos a serem construídos, bem como as tarefas a serem realizadas para que esta construção se efetive. Para tanto, a função do professor deve ser a de orientador da aprendizagem, isto é, a de instigador de ideias, de orientador de rumos, num trabalho com erros e acertos. Assim, a proposta de desenvolvimento de um tema, com os alunos, pode ter como ponto de partida a colocação de um problema, a partir do qual se iniciará a discussão das ideias centrais do tema, em questão, levando em conta os objetivos que ser quer atingir (SÃO PAULO, 1989, p. 10).

Diferentemente do MMM, movimento em que a proeminência das propostas envolvia os novos conteúdos de ensino – uma nova matemática, uma matemática moderna, de iniciação à matemática superior estruturalista –, este novo movimento retoma o foco dos ensinos, considerando o sujeito que aprende. E, nessa discussão, uma maior complexidade se apresenta como resultado de pesquisas e das práticas do ensino de matemática. A ideia de paralelo entre estruturas algébricas e cognitivas que, de certo modo, colocava em plano inferior o aprendiz – considerado como um dado, como um sujeito universal –, passa a ser questionada por novas perspectivas teóricas que fazem emergir o campo da educação matemática. Trata-se de uma nova ruptura que faz lembrar aquela que erigiu a pedagogia moderna, em contraponto às bases intelectualistas do Iluminismo.

Análises internacionais um tanto mais distanciadas do MMM avançaram para além da questão de métodos e processos de aprendizagem, e tocaram diretamente no

conteúdo matemático, criticando o que ocorreu nos tempos da matemática moderna. Colocam em xeque as premissas da própria matemática advogada pelos bourbakistas. E uma dessas análises da matemática na escola está publicada no "Rapport au ministre de l'Éducation Nationale", texto elaborado sob a direção de Jean-Pierre Kahane, intitulado "L'enseignement des sciences mathématiques: Commission de Réflexion sur l'Enseignement des Mathématiques" (KAHANE, 2002). Vindo à luz sob a perspectiva de repensar os ensinos de matemática para um novo século, o trabalho apresenta análises que respondem a uma questão de fundo: *que matemática deve estar presente na escola?* Na resposta a essa questão, há uma retrospectiva e uma crítica ao Movimento da Matemática Moderna, bem como novas propostas para os diversos ramos que envolvem os saberes matemáticos considerados fundamentais para a formação de cidadãos de uma nova era, de um novo século que se iniciava. De pronto, a informática, a estatística e as probabilidades, a geometria e o cálculo eram considerados como peças-chave da formação que envolve conhecimentos matemáticos para o novo milênio.

Sem pretensão de elaborar uma resenha da obra, mas apenas buscando caracterizar a matemática que deve estar presente na escola nesse movimento pós-MMM, tome-se a *geometria*, ícone dos debates que reivindicavam uma nova matemática no final dos anos 1950, agora recuperada pelo movimento da educação matemática. E porque retomar, no novo milênio, os ensinos de geometria, de geometria euclidiana, tão duramente criticados em tempos bourbakistas?

A geometria euclidiana é considerada, do ponto de vista dos Bourbaki, como uma "ciência morta". O grupo indicava que, há mais de um século, não mais se realizavam pesquisas matemáticas sobre o tema. No entanto, mesmo do ponto de vista da pesquisa, se não existem investigações diretamente sobre a geometria elementar, hoje há domínios matemáticos em que ela está presente de modo essencial: na geometria diferencial, nos aspectos geométricos da estatística, na pesquisa operacional via programação linear, em certos domínios da informática (geometria algorítmica), na imagem e suas relações com a geometria projetiva (PERRIN, 2002, p. 105). Assim, mesmo do ponto de vista da pesquisa matemática, é essencial recuperar a geometria euclidiana na formação matemática. No entanto, o argumento mais importante que vai de encontro às restrições bourbakistas refere-se à formação que a geometria elementar possibilita: "pensar geometricamente", que significa tornar-se capaz de se apoiar sobre a intuição geométrica que é adquirida no plano e no espaço, para aplicá-la a situações complexas (PERRIN, 2002, p. 106). Em suma: as críticas pós-MMM também se dirigem diretamente à matemática, aos conteúdos matemáticos que estavam sendo alijados pela matemática moderna, como a geometria euclidiana.

Dos congressos internacionais, das pesquisas sobre as práticas de ensino da matemática, das novas elaborações teóricas decorrentes do contraponto ao MMM estabelece-se a *educação matemática*. Trata-se de um campo tanto profissional quanto científico (SCHUBRING, 1993).

Da educação matemática para o ensino de matemática: novos caminhos, novos fins?

Por certo, os movimentos da matemática na escola sintetizados até este ponto não devem ser vistos como únicos em cada tempo. Em uma análise mais ampla, cada movimento jamais está sozinho em uma época histórica – é sempre construído no embate com outros, visando a se sobrepor a eles. Longe a ideia de estabelecer que um dado movimento inclui a todos em uma mesma causa, com os mesmos ideais e práticas. A caracterização dos movimentos da matemática na escola é devedora de aspectos de movimentos sociais mais amplos. Sua especificidade, em cada tempo histórico, leva a correntes dominantes, perspectivas que têm mais adeptos nos debates, nas publicações, nos referentes para o ensino e a aprendizagem da matemática. Enfim, ações coletivas hegemônicas em uma dada época da história da educação sobre a matemática na escola.

Por outro lado, as vozes destoantes, aquelas que não fazem coro aos movimentos mais amplos, por vezes, constituem gérmens para novos movimentos. Muitas delas se abrigam e impulsionam verdadeiros contramovimentos. Assim se passa, por exemplo, no estabelecimento da contracultura pedagógica que desencadeou o movimento modernizador da matemática na escola, na caracterização feita anteriormente do "Movimento da Educação Matemática".

Ao que tudo indica, atualmente, assiste-se ao nascimento de um novo movimento, um verdadeiro contramovimento ao da educação matemática.

Os tempos atuais de educação matemática convivem com o *ensino* de matemática. Entre nós e em todos os países de língua portuguesa, divulga-se o *Klein Project*, por meio do *site* <http://klein.sbm.org.br>:

> O Projeto Klein de matemática em português vai coordenar e organizar a contribuição do Brasil ao *Klein Project for the 21st Century*, além de articular a colaboração nesta área com pesquisadores, professores e educadores dos

> demais países de língua portuguesa, para ampliar de forma substancial o alcance dos resultados. Outro objetivo central do projeto é a produção de material bibliográfico em língua portuguesa que seja de efetiva utilidade para o ensino da matemática em todos os níveis (PROJETO KLEIN).

Dentre os objetivos do projeto inclui-se:

> Produzir um livro de leitura acessível, mas profissional, que transmita a conexão, crescimento, relevância e a beleza da disciplina matemática, desde suas grandes ideias a fronteiras da pesquisa e aplicações. Este livro será disponibilizado em várias línguas, incluindo o português (PROJETO KLEIN).

O Projeto Klein é a face pedagógica mais visível do contramovimento do ensino de matemática em face da educação matemática. A proposta parece querer recuperar a primazia do conteúdo matemático, estabelecendo a volta do sujeito universal que aprende matemática. Não mais em termos de um ensino de matemática, mas do acento institucional do Ensino de Matemática; em outras bases, por certo, de tempos anteriores, e perfilada à figura inatacável de Felix Klein, pioneiro matemático a refletir sobre as questões da matemática na escola. Trata-se de um novo intelectualismo, que busca recuperar Klein como um novo Condorcet...

A face institucional desse contramovimento, que justifica a passagem do *ensino de matemática* para o *Ensino de Matemática*, revela-se na existência do paralelismo, aos programas de pós-graduação em educação matemática, os programas em ensino de matemática. E, também, na criação dos mestrados profissionais em ensino de matemática. Existe, ainda, de modo emblemático, no seio da criação de um dos programas pioneiros de pós-graduação em educação matemática, uma ruptura de fundo: a criação de um Departamento de Educação Matemática, em contraposição ao Departamento de Matemática...

Considerações finais

Os estudos que têm como foco temático discutir a matemática na escola em uma perspectiva histórica apresentam-se em diferentes vertentes. Uma tentativa de caracterizá-las está esboçada no texto de Valente (2010). Em síntese, de algum modo aceita por outros autores, tais vertentes se diferenciam pelo lugar de onde é vista e analisada a matemática na escola. Há os que se posicionam como matemáticos; na história da matemática, consideram que a matemática na escola é um dos aspectos da

própria história da disciplina. Existem os que realizam a leitura em perspectiva histórica da matemática na escola como um expediente para ensinar conteúdos matemáticos. Há ainda os que tomam a matemática na escola como leituras de memórias de professores e estudantes, também com a finalidade didática da aprendizagem matemática. Por fim, há os que analisam a matemática na escola, em perspectiva histórica, como uma especificidade da história da educação.

Seja como for, o que importa é a realização de um esforço para a compreensão sobre a presença da matemática na escola ao longo do tempo. A todas as vertentes, ao que parece, a categoria de *movimento* é algo compartilhada. Há pelo menos mais de um século, considerando-se a referência da criação da IMUK/CIEM em 1908, existem movimentos da matemática na escola. A análise desses movimentos parece constituir um veio fértil para a elaboração de uma periodização que rompe com lugares específicos de miradas na análise da matemática na escola. Considerar tais movimentos significa agrupar múltiplos olhares que reúnem questões didáticas, históricas, educacionais, políticas, sociais e matemáticas, entre outras.

A passagem do *ensino de matemática*, visto como modo de realizar a instrução dos conteúdos matemáticos, para a *educação matemática*, entendida como um movimento de deslocamento dos conteúdos de instrução para as necessidades e as possibilidades dos aprendizes, revela a filiação direta da matemática na escola aos aspectos mais amplos da educação. A educação matemática se insere na modernização pedagógica levada a termo a partir do final do século XIX. Por certo para esse movimento concorreram matemáticos, pedagogos e professores. O panorama mundial que trouxe novos valores para a escola, para o ensino e para a educação ecoa nas hostes matemáticas. Klein não constitui um pioneiro solitário e, tampouco, não é por acaso que Euclides Roxo atuou na Associação Brasileira de Educação (ABE)...

O MMM, que fortemente cunhou a matemática na escola como um "movimento", também está imerso em um onda maior, a do *estruturalismo*, que se espraia para todas as áreas do saber. Como resultado mais específico, leva a matemática na escola a uma valorização imensa dos novos conteúdos, formas elementares advindas de simplificações e mesmo transposições da matemática estruturalista, da matemática das estruturas. Nesse movimento, o sujeito que aprende se reduz a estruturas cognitivas universais, mobilizadas em paralelo às estruturas colocadas para serem ensinadas na nova organização da matemática escolar. Promove-se assim o deslocamento de uma educação matemática para um ensino de matemática. Não um retorno às bases anteriores, às formas da instrução matemática: aqui, existe uma preocupação metodológica diferente

dos primeiros tempos. Nestes, a própria organização dos conteúdos e sua sequência já indicavam a didática, os modos de ensinar. Aqui, no MMM, as preocupações didáticas são de outra natureza. Envolvem o desafio de realizar transposições, de modo que as estruturas algébricas possam ter alguma concretude. Para os primeiros anos escolares, por exemplo, materiais estruturados – blocos lógicos são um exemplo emblemático – tomam o lugar de materiais empíricos dos tempos do ensino intuitivo.

O surgimento do campo profissional e de pesquisas intitulado *educação matemática* remete ao refluxo do MMM. Ele pode ser entendido como um movimento de construção da identidade docente, de uma identidade específica: a do *educador matemático*. Longe da representação de que ser professor de matemática é ser matemático, a educação matemática se coloca como um espaço de construção da identidade profissional de todos os professores voltados para educar por meio da matemática. Se, por um lado, isso se relaciona ao campo profissional, ele não se estabelece por si mesmo, mas precisa de referências em cadeiras disciplinares, com reconhecimento da produção científica. E, aqui, erige-se o campo de pesquisa *educação matemática*, forjando novos saberes constitutivos do novo profissional. Esses saberes também vão sendo elaborados, a princípio, em contraposição aos ditames da matemática estruturalista. Saberes matemáticos considerados "mortos" renascem como vivamente importantes para a formação matemática. Estabelece-se a passagem do ensino de matemática para a educação matemática.

Por fim, assiste-se ao embate contemporâneo da *educação matemática* com o *ensino de matemática*. Nos dias atuais, o ensino de matemática busca foros que o ensino de matemática em tempos anteriores não possuía. Intenta institucionalizar-se, constituir um campo de pesquisa e arrebanhar professores que, de algum modo, sentem-se pouco confortáveis na especificidade docente, esvaziada de *status* social, buscando proximidade com a representação firmemente estabelecida de que professores de matemática são matemáticos. A julgar pelos programas governamentais, o ensino de matemática vem obtendo apoios essenciais...

As marchas e as contramarchas da matemática na escola, por certo, têm as suas especificidades. As linhas anteriores buscaram enfatizá-las. De outra parte, existe uma herança das contradições entre os dois modelos pedagógicos que vêm de longe, que subsidiam e permitem compreender melhor esses movimentos da matemática na escola. Dualidades como *instrução* e *educação*, *racionalismo* e *empirismo* atestam a presença viva dessa herança.

Bibliografia

ACZEL, A. D. *El artista y el matemático*: la historia de Nicolas Bourbaki, el genio matemático que nunca existió. Barcelona: Espanha: Gedisa Editorial, 2009.

BARBOSA, R. *Obras completas de Rui Barbosa:* reforma do ensino primário e várias instituições complementares da instrução pública, v. 10, tomo 2. Rio de Janeiro: Ministério da Educação e Saúde, 1946.

BULLE, N. La pensée pédagogique moderne: entre science et politique. IN: JACQUET-FRANCILLON, F.; KAMBOUCHNER, D. *La crise de la culture scolaire*. Paris: PUF, 2005.

CHARTIER, R. *A história cultural:* entre práticas e representações. Lisboa: Editora Difel; Rio de Janeiro: Editora Bertrand Brasil S.A., 1990.

CHARTIER, R. *La historia o la lectura del tempo*. Barcelona: Editorial Gedisa, 2007.

CHERVEL, A. História das disciplinas escolares: reflexões sobre um campo de pesquisa. *Teoria & Educação*, n. 2, p. 177-229, 1990.

DIENES, Z. P. *A matemática moderna no ensino primário.* Portugal: Editora Fundo de Cultura; Brasil: Livros Horizonte Ltda., 1967.

DIENES, Z. P.; GAULIN, C.; LUNKENBEIN, D. Un programme de mathématique pour le niveau élémentaire. *Bulletin de l'AMQ,* 1969.

DOSSE, F. *Histoire du structuralisme, tome 1*. Paris: Éditions La Découverte, 1992.

GROSSI, E. P. Novas perspectivas para o ensino da matemática à luz do conhecimento do processo cognitivo. IN: CAMPOS, T. M. M. (Ed.). *Anais do I ENEM*. São Paulo: PUC-SP, 1988.

GUIMARÃES, H. M. Por uma matemática nova nas escolas secundárias: perpectivas e orientações curriculares da matemática moderna. IN: MATOS, J. M.; VALENTE, W. R. (Orgs.). *A matemática moderna nas escolas do Brasil e de Portugal:* primeiros estudos. São Paulo: Editora Da Vinci, 2007.

HOFSTETTER, R.; SCHNEUWLY, B. (Eds.) *Savoirs en (trans) formation*: au coeur des professions de l'enseignement et de la formation. Bruxelles: Éditions De Boeck Université, 2009.

KAHANE, J.-P. (Dir.). *L'enseignement des sciences mathématiques:* rapport au ministre de l'Éducation nationale. Paris: Odile Jacob, 2002.

OECE. *Mathématiques Nouvelles*. Paris: OECE, 1961.

PATRAS, F. *La pensée mathématique contemporaine.* Paris: PUF, 2001.

PERRIN, D. La Géométrie. In: KAHANE, J.-P. (Dir.). *L'enseignement des sciences mathématiques:* rapport au Ministre de l'Éducation Nationale. Paris: Odile Jacob, 2002.

PIAGET, J. et. al. *L'Enseignement des mathématiques.* Suiça: Delachaux & Niestlé S.A., 1955.

ROXO, E. *Curso de mathematica elementar.* Rio de Janeiro: Livraria Francisco Alves, 1929.

SÃO PAULO (Estado). Secretaria da Educação. Coordenadoria de Estudos e Normas Pedagógicas. *Proposta curricular para o ensino de matemática*: 2º grau. 2.ed. São Paulo: SE/CENP, 1989.

SCHUBRING, G. Comparative study of the development of mathematics education as a professional discipline in different countries: General trend report. In: ZWENG, M. et. al. (Ed.). *Proceedings of the Fourth International Congress on Mathematical Education.* Boston, EUA: Birkhäuser, 1993.

SOUZA, M. C. C. Decorar, lembrar e repetir: o significado de práticas escolares na escola brasileira do final do século XIX. In: SOUSA, C. P. (Org.). *História da educação:* processos, práticas e saberes. São Paulo: Escrituras Editora, 1998.

VALENTE, W. R. *Euclides Roxo e a modernização do ensino de matemática no Brasil.* Brasília: Editora da UnB, 2004.

VALENTE, W. R. Mello e Souza e a crítica aos livros didáticos de matemática: demolindo concorrentes, construindo Malba Tahan. *Revista Brasileira de História da Matemática*. SBHMat. v. 4, n. 8, p. 171-187, 2004.

VALENTE, W. R. *Oswaldo Sangiorgi*: um professor moderno. São Paulo: Editora Annablume, 2008.

VALENTE, W. R. Trends of the history of mathematics education in Brazil. *ZDM.* Berlin, v. 42, p. 315-323, 2010.

Parte 2

A matemática no Brasil

O ensino da matemática no Brasil: uma análise dos modelos pedagógicos

Isabel Cristina Machado de Lara

Introdução

Historicamente, a matemática tem sido vista pela maioria dos professores como a maneira, por excelência, de desenvolver o raciocínio dos estudantes. Por isso mesmo, ela aparece como o conhecimento mais eficaz para distinguir um estudante mais inteligente de um menos inteligente. Adicionado a isso, atribui-se à matemática o potencial de desenvolver nos estudantes habilidades para resolver problemas, o que favoreceria a compreensão do mundo e a formação do pensamento crítico, assegurando o desenvolvimento individual e a integração na sociedade. Verifica-se que tudo se passa como se a disciplina de matemática fosse o meio privilegiado para o desenvolvimento da racionalidade e da inteligência, do pensamento crítico e do desenvolvimento individual e social (LARA, 2001).

Tal discurso torna a matemática uma disciplina central nos currículos escolares e nos exames de seleção. Portanto, ela produz efeitos muitas vezes negativos, devido ao alto percentual de reprovação não apenas na escola, mas na sociedade de modo geral, fazendo com que tenha sido constituída historicamente como "vilã", como "bicho-papão" ou como "terror de jovens e adultos", responsável pelo fracasso de muitos estudantes.

Consequência disso é a "crise do ensino da matemática", o qual, na tradição moderna, tem sido atribuída principalmente à formação insuficiente de professores, à inadequação dos livros didáticos, à falta de recursos, à metodologia de ensino ineficaz e à reformulação curricular. Para minimizar a crise, a matemática, em particular no Brasil, vem sendo vista sob diferentes perspectivas que possibilitaram diversos modos de pensar o seu ensino e a sua aprendizagem. Ao analisar essas condições históricas, verifica-se que o discurso ocidental moderno apresenta a matemática como um conhecimento universal, capaz de permitir intervenção e controle sobre a natureza (LARA, 2001).

Trata-se, em uma perspectiva foucaultiana, de uma visão que reflete uma "vontade de poder" (FOUCAULT, 2004). Essa vontade se configura ao lançarmos um olhar sobre as diferentes práticas discursivas pedagógicas presentes nos modelos pedagógicos que surgiram na educação matemática, no final do século XX. Evidencia também uma visão que fundamenta suas concepções de ensino e aprendizagem em técnicas e táticas de poder próprios das sociedades disciplinares (FOUCAULT, 1987).

Em seus estudos, Lara (2001) mostra que a matemática apresenta um poder disciplinador que é exercido por meio de provas graduadas e pela abordagem de conteúdos hierarquizados e determinados por um programa curricular que atua como um olhar que ordena, classifica e normaliza. Desse modo, é possível que os estudantes sejam objetivados, podendo ser descritos e analisados como "bons" ou não em matemática, na medida em que são mensurados, qualificados e classificados.

Por meio de técnicas de hierarquia, os estudantes são regulados, diferenciados e comparados entre si, para verificar suas capacidades e aptidões em relação a um padrão determinado, tornando cada um deles "um caso": "[...] um caso que ao mesmo tempo constitui um objeto para o conhecimento e uma tomada para o poder" (FOUCAULT, 1987, p. 159). Assim, o exame está no cruzamento do *poder* e do *saber*. Desse modo, a disciplina matemática se constitui como um conjunto de conhecimentos destinados ao controle minucioso do modo de pensar e raciocinar dos indivíduos e, por meio da imposição e da sujeição a esse modo de pensar, produz determinadas habilidades mentais (LARA, 2001).

No entanto, tal subjetivação varia em diferentes momentos e circunstâncias, uma vez que o modo de ensinar a matemática é produzido por diferentes práticas discursivas. Assim, este texto não pretende dar conta de uma análise minuciosa dos discursos que orientaram as práticas pedagógicas no ensino da matemática, em particular no Brasil, até o século XX. Outros autores já tiveram essa preocupação, destacando-se o trabalho de Fiorentini (1995). O presente artigo limita-se a mostrar que diferentes modelos pedagógicos produziram diferentes modos de perceber o ensino da matemática, criando condições que possibilitaram diversos modos de subjetivação e diversos modos de ensinar a matemática, esperando-se a formatação de determinado tipo de estudante.

Vale ressaltar que todos esses modelos pedagógicos foram hegemônicos em algum momento e que, de certo modo, todos ainda estão vigentes.

A matemática como conhecimento indispensável

A dificuldade que os estudantes têm em matemática é perceptível desde o 1° ano do ensino fundamental até o ingresso no curso universitário. Nas últimas décadas, essa real "crise da matemática" vem sendo muito discutida pelos educadores. Nessas discussões, entre as causas apontadas com maior frequência destacam-se: desinteresse dos estudantes; formação insuficiente dos professores; inadequação dos livros didáticos; falta de recursos; e currículo ultrapassado. Cada um desses aspectos tem originado pesquisas e propostas em educação matemática, com o propósito de encontrar um caminho que minimize a "crise" do seu ensino e explique o porquê de a disciplina matemática ser a que mais contribui para o fracasso escolar.

Entre esses estudos, encontra-se o de d'Ambrosio, que afirma que "[...] a motivação básica para tudo que fazemos, pesquisa, ensino, enfim, toda a nossa atividade, é a melhoria da qualidade de vida do homem", enfatizando o grande potencial da educação matemática "[...] para ajudar na solução dos problemas de base do nosso desenvolvimento" (D'AMBROSIO, 1986, p. 16). Esse discurso reforça a produção da matemática como uma disciplina indispensável para o currículo escolar, o que justificaria a sua intensidade em todos os níveis de ensino (LARA, 2001).

Além disso, por ser utilizada como um instrumento de seleção, a matemática se mostra como um conhecimento que distingue e diferencia os indivíduos entre si, classificando-os como inteligentes ou não. Essa possibilidade é dada à matemática, pois, conforme Pavanello:

> A falta, ou insuficiência, de conhecimento matemático faz com que a maioria das pessoas torne-se incapaz de compreender muitos problemas que afetam, não só a vida pessoal de cada um, como a da sociedade como um todo, impedindo, assim, uma tomada de posição mais crítica frente a esses problemas e aos caminhos propostos para resolvê-los (PAVANELLO, 1989, p. 7).

Ao afirmar que "é lícito, pois, concluir, que conhecer matemática é condição para a atuação crítica do indivíduo na sociedade" (PAVANELLO, 1989, p. 7), o autor aponta que

> [...] portanto, é necessário que se dê a todos os indivíduos acesso aos conhecimentos e instrumentos matemáticos úteis à sua existência e à melhor compreensão dos fenômenos naturais e sociais do mundo que o cerca. [...] garantir a todos o conhecimento matemático, objetivando o desenvolvimento pessoal do aluno e sua instrumentalização, de modo a permitir sua inserção crítica e, portanto, política, na sociedade (PAVANELLO, 1989, p. 7).

Nessas afirmações, torna-se explícito que não se ensina matemática apenas para que os estudantes aprendam um determinado conteúdo matemático, ou pela sua utilidade imediata no cotidiano das pessoas. O objetivo é o "desenvolvimento do pensamento" dos estudantes, um pensamento caracterizado por um tipo de raciocínio: o *lógico formal*.

Vê-se, portanto, a importância de se garantir a aprendizagem da matemática, a qual, além do desenvolvimento cognitivo, seria justificada por seu caráter formativo. Carvalho, por exemplo, afirma que é por meio dos instrumentos oferecidos pela matemática que a escola assume a função de formadora de "cidadãos conscientes":

> A escola tem uma responsabilidade social, e não deve permitir que seus alunos saiam despreparados para atuar como *cidadãos conscientes* [grifo nosso] em uma sociedade cada vez mais permeada pela ciência e pela tecnologia. Parte disso consiste em habilitá-los a resolver problemas que possam ser formulados matematicamente. *Mas essa capacidade operativa deve ser consequência da compreensão das estruturas, das ideias e dos métodos matemáticos pelos alunos* [grifo nosso] (CARVALHO, 1991, p. 24).

Ademais, em um artigo escrito para revista "The Economist", d'Ambrosio destaca a essencialidade da matemática no currículo escolar, ao enfatizar que, na sociedade atual, ela é considerada a base do avanço tecnológico e científico: "[...] sem dúvida, o futuro está impregnado de ciência e tecnologia – para o bem ou para o mal. A matemática está na raiz da ciência e da tecnologia. [...] Não podemos ser cidadãos do século XX sem matemática" (D'AMBROSIO, 1993, p. 25).

Em suma, tais discursos constituem a matemática como a principal maneira de desenvolver o raciocínio dos estudantes. Em uma obra mais recente, o mesmo d'Ambrosio critica essa posição:

> [...] na verdade, ser racional é identificado com dominar a matemática. A matemática apresenta-se como um deus mais sábio, mais milagroso e mais poderoso que as divindades tradicionais e outras tradições culturais. [...] Lamentavelmente continuamos a insistir que inteligência e racionalidade estão identificadas com a matemática (D'AMBROSIO, 1998, p. 114).

Conforme o pensamento de Foucault (1995), o discurso constitui o objeto de que fala. A dispersão e a repetição de discursos como esses produzem uma verdade sobre a matemática, a qual lhe garante a posição de destaque que tem em nossa sociedade e no âmbito da educação brasileira. Com esse olhar, pretendo descrever cada um desses discursos, evidenciando por que tais enunciados surgiram em lugar de outros e forneceram condições para a emergência de diferentes modelos pedagógicos.

O modelo pedagógico formalista clássico

No Brasil, o ensino da matemática foi orientado de forma hegemônica, até o início do século XX, por um modelo caracterizado pela sistematização lógica e pelo rigor e formalismo matemáticos do modelo euclidiano, evidenciando sua prática pedagógica por meio do pensamento platônico. A essência do modelo euclidiano é o rigor das demonstrações de teoremas, encadeadas a partir de uma série de definições verdadeiras e aceitas (não demonstráveis), chamadas de *axiomas* e *postulados*. Por outro lado, o ponto de vista platônico, de acordo com Hersh e Davis, define os objetos matemáticos como imutáveis: "Não foram criados, e não mudarão ou desaparecerão. Qualquer pergunta significativa sobre um objeto matemático tem uma resposta definida, quer sejamos capazes ou não de determiná-la" (HERSH; DAVIS, 1989, p. 359).

Desse modo, os professores que adotam uma postura formalista clássica exercem uma prática pedagógica que produz a matemática como um conhecimento estático, a-histórico e preexistente, apresentando-se como um conhecimento inato, para o qual o ser humano nada cria ou inventa. Nesse tipo de pedagogia – conhecida como "tradicional", "clássica" ou, como classifica Fiorentini (1995), "formalista-clássica" –, a aquisição do conhecimento matemático está fundamentada em um modelo de racionalidade transcendental. Assim, ela ocorre como resultado da reflexão do indivíduo consigo mesmo, ou seja, em um processo interno, uma vez que se postula que o conhecimento está contido na própria alma (LARA, 2001). Contudo, existe também uma relação de exterioridade, pois a matemática, em uma visão platônica, está incluída no mundo das ideias, sendo uma criação divina. Portanto, o conhecimento está dado de antemão, cabendo ao sujeito matemático apenas "acordá-lo" por meio de uma conscientização, mas sem o poder de transformá-lo, inventá-lo ou construí-lo: o sujeito pode simplesmente, pela intuição e pela reminiscência, descobrir as ideias matemáticas adormecidas em sua mente.

Nessa visão, as matemáticas direcionavam o espírito humano à libertação do sensível, de modo a tornar o indivíduo capaz de pensar o *inteligível*, o qual, para Platão, é a única realidade verdadeira, ou seja, a *verdade absoluta*. Além disso, é necessário que se consiga atingir um maior grau de abstração, fazendo com que a experiência sensível seja eliminada e ceda lugar às experiências puramente racionais. O ensino da matemática passa a ser visto como ineficaz, quando restrito apenas a aplicações práticas.

Enfim, com tais pressupostos – discurso euclidiano e discurso platônico –, o modelo formalista clássico tem como principal finalidade do ensino da matemática o desenvolvimento do

"espírito", da "disciplina mental" e do pensamento lógico-dedutivo, o qual define a função central e diretiva do(a) professor(a).

Uma prática pedagógica alicerçada nesse tipo de pensamento (platônico) acaba produzindo, tanto na escola como na sociedade, um conhecimento visto como a verdadeira forma de conhecimento, um conhecimento essencial. Como efeito disso, a disciplina matemática presente em nossas escolas passa a ser vista, ainda nos dias de hoje, como a forma por excelência de desenvolver o raciocínio, capaz de distinguir estudantes mais inteligentes dos menos inteligentes.

Adicionado a isso, nesse modelo pedagógico, os estudantes seriam capazes – por meio do conhecimento matemático – de ter controle sobre as demais ciências e sobre a natureza, ideia reforçada pelo modelo de racionalidade cartesiana. O desejo de "matematizar" o mundo e a busca de um método universal capaz de solucionar qualquer problema humano cientificamente, de modo racional e sistemático, constituiu o "sonho de Descartes" (LARA, 2001).

Foi com base nesses pressupostos que prevaleceu, até o século XX, o papel da escola de garantir às classes dominantes um ensino mais racional e rigoroso, por meio da geometria, enquanto que, para as classes menos favorecidas, em particular os estudantes das escolas técnicas, o ensino se voltava para o cálculo, com uma abordagem mais mecânica e pragmática da matemática (FIORENTINI, 1995). Assim, a aprendizagem da geometria era privilégio de poucos, dos "bem-dotados" intelectual e economicamente, e consistia em um estudo centrado na imagem do professor e em uma aprendizagem passiva, que ocorria por meio da memorização e da repetição precisa dos raciocínios e algoritmos transmitidos por esse professor.

É perceptível que, ainda na segunda década do século XXI, alguns professores evitem trabalhar com geometria nas aulas, devido não somente à sua suposta dificuldade, mas também ao despreparo que esses professores, em particular dos anos iniciais do ensino fundamental, têm para abordar a geometria em sala de aula.

O fato de considerar que a matemática é algo pronto, acabado, que tem solução para todos os problemas e que é constituída por definições, postulados e teoremas irrefutáveis, faz com que alguns professores acabem apenas transmitindo o conhecimento matemático. Com isso, o professor se torna o centro do processo de ensino, delegando aos estudantes apenas a cópia, a memorização e a repetição do que é estudado. Aquele leva para a sala de aula problemas-padrão, passíveis de memorização dos processos de resolução utilizados.

É perceptível, em nossas salas de aula, em qualquer um dos níveis da educação básica, que, quando o enunciado de um problema é alterado, os estudantes ficam totalmente "perdidos", sem saber como resolvê-lo. Isso se deve, principalmente, à sua passividade nos processos de ensino e aprendizagem.

O modelo pedagógico empírico-ativista

A partir da década de 1920, o pensamento empírico-ativista emergiu com a preocupação básica voltada para as características e diferenças biológicas e psicológicas entre os indivíduos. Ocorre a passagem do intelecto para o sentimento, na tentativa de superar o lógico pelo psicológico, e a quantidade pela qualidade. Nesse discurso, o importante é "aprender a aprender" (FIORENTINI, 1995).

Trata-se de uma visão aristotélica do conhecimento, que apresenta apenas alguns deslocamentos da "vontade de saber" presente no discurso platônico, pois, para Aristóteles, o conhecimento matemático não estava em outro mundo, como para Platão, mas, sim, nos objetos e nas experiências que o sujeito tem com ele. As práticas discursivas pedagógicas fundadas nessa visão pressupõem que o conhecimento se inicie pela experiência (LARA, 2001).

No entanto, esse modelo pedagógico não rompe com a "vontade de totalização" da matemática, pois, apesar de acreditar que o conhecimento matemático emerge do mundo físico e é captado pelos sentidos, postula que o conhecimento ocorre por meio da *descoberta*. Desse modo, continua com uma concepção *idealista* de conhecimento. A diferença decorre de se considerar que o conhecimento preexiste não no mundo das ideias (aquém-mundo), mas no próprio mundo natural e material em que vivemos (LARA, 2011).

Nos Estados Unidos, no século XIX, esse modelo era conhecido como "associacionismo", no qual se considera que os fenômenos da consciência são produzidos por meio de sensações ocorridas a partir de associações criadas entre elementos simples; além disso, o modelo levava em consideração, em suas práticas discursivas pedagógicas, as relações entre a *pedagogia* e a *psicologia*. É importante ressaltar que, ainda no século XVIII, Rousseau (1712-1778) inaugurou duas preocupações que se tornaram centrais para a pedagogia moderna: "[...] a ideia de infância como período específico, com interesses e necessidades próprios, e a ideia do desenvolvimento mental regulado por leis constantes" (MARZOLA, 1995, p. 28). Segundo Marzola, na perspectiva rousseauniana, "[...] a educação deve adaptar-se ao movimento natural do desenvolvimento mental da

criança, que – através da atividade espontânea – participa da sua própria formação" (MARZOLA, 1995, p. 28).

Manacorda (1989) afirma que o conhecimento da psicologia infantil e da psicologia da idade evolutiva, tanto das crianças individualmente consideradas como da infância e da adolescência, é um tema essencial das escolas novas. O movimento dessas escolas, denominado *escolanovista*, utiliza como estratégia a crítica às pedagogias tradicionais.

No entanto, as descobertas de Rousseau estavam fundamentadas na intuição da realidade do desenvolvimento mental, sem o estudo nem a definição experimental das leis de maturação psicológica das crianças, não se constituindo como uma pedagogia científica (MARZOLA, 1995). Isso somente veio a acontecer mais tarde, na segunda metade do século XIX.

No Brasil, o modelo pedagógico promovido pelos escolanovistas ganhou espaço por meio de manuais didáticos, que consideravam como preocupação principal a instrumentalização técnica dos indivíduos para a resolução de problemas (FIORENTINI, 1995).

Evidencia-se assim que o caráter instrumental do ensino da matemática caracteriza a forma como ocorre a *subjetivação matemática*. Segundo Fiorentini (1995), a finalidade dos sistemas educacionais consistia em desenvolver capacidades individuais, contribuindo para satisfazer os interesses dos estudantes e as exigências da sociedade. O método de ensino relacionado ao discurso empírico-ativista é voltado para a *modelagem matemática* e para a *matemática aplicada*, pois, no empirismo, não se enfatizam tanto as estruturas internas da matemática, mas, sim, a sua relação com as demais ciências. Em consequência, ocorre uma solidificação ainda maior da posição central e onipotente da matemática, bem como um poder de homogeneização por meio de uma linguagem geral para todos, a *linguagem matemática* (LARA, 2001).

Nesse sentido, a prática de um professor centrada nesse modelo prioriza o uso de materiais concretos e a resolução de problemas, levando os estudantes à descoberta do conhecimento matemático. Com isso, o papel do professor se desloca do centro dos processos de ensino e aprendizagem, fazendo com que os estudantes se tornem mais ativos.

O modelo pedagógico formalista moderno

Um acontecimento que corroborou a racionalidade moderna e sua vontade de totalização ocorreu no período da corrida espacial, nos anos 1950, durante a chamada Guerra Fria, quando o primeiro satélite artificial, o Sputnik 1, foi lançado no espaço pelos russos, em outubro de 1957. Tal acontecimento possibilitou a emergência de outras orientações pedagógicas que corroboraram a visão da constituição de um sujeito matemático capaz de controlar o mundo. Assim, mesmo com mudanças na pedagogia adotada, a hegemonia da racionalidade moderna não se rompeu – ao contrário, ela foi reforçada (LARA, 2011).

Para os líderes acadêmicos norte-americanos, aquele acontecimento foi um sintoma muito claro de que o ensino científico estava ultrapassado ou deficitário. A preocupação passou a ser a de repensar o estudo das ciências nos EUA, visando a encontrar possíveis falhas. Com isso, foi publicada uma série de estudos sobre o assunto, com o intuito de reformular as pedagogias da educação formal norte-americana no terreno das ciências, buscando sair do enfoque meramente mecanicista e mnemônico ainda predominante, constituído pelo discurso tradicional, para um enfoque mais prático e voltado para a aplicabilidade. De acordo com Búrigo (1990), procurou-se adequar o ensino secundário à nova realidade das universidades, que buscavam mais a produção de técnicos do que a formação de dirigentes da sociedade.

Na visão de Bicudo (1991), não estava em questão se a concepção de matemática ajudaria ou não no desenvolvimento do ser humano. Os americanos constataram que os russos estavam "na dianteira em termos de conquista espacial" porque eles conheciam mais Matemática do que os americanos, e pretendiam resolver a questão ensinando, "[...] aos nossos jovens, a Matemática necessária ao lançamento de satélites" (BICUDO, 1991, p. 34).

Todas essas preocupações, tanto da expansão como da melhoria do ensino das ciências naturais e das profissões técnicas, estavam direcionadas aos interesses do capital norte-americano. Segundo Búrigo, o discurso norte-americano e europeu reproduzia o tom de um discurso nacional identificado como *progressista*, o discurso dos escolanovistas:

> O discurso dos escalonovistas expresso com alto grau de representatividade no manifesto de 1959: 'A era tecnológica marca o fim do processo de ensino para a adaptação e o começo do processo de ensino para a evolução do homem e do universo. [...] Daí a necessidade de uma preocupação científica e técnica que habilitará as gerações novas a se servirem, com eficácia e em escalas cada vez

> maiores, de todos os instrumentos e recursos de que as armou a civilização atual' (AZEVEDO et. al., 1959, p. 21 apud BÚRIGO, 1990, p. 261).

Para garantir isso, os processos de ensino e aprendizagem parecem não se alterar em relação à proposta tradicional ainda dominante. Ao contrário, eles a corroboram, acentuando a abordagem internalista da matemática, justificando-se por si mesma, autossuficiente, bem como a linguagem e o rigor matemáticos. Didaticamente, o ensino retoma sua posição autoritária, o professor retorna ao centro do processo de ensino, expondo e demonstrando tudo de forma rigorosa, cabendo aos estudantes reproduzirem sua linguagem e seus raciocínios, salvo algumas experiências alternativas oriundas de orientações escolanovistas, de base psicológica, ou tecnicistas (FIORENTINI, 1995).

No entanto, é a mudança da ênfase – antes atribuída ao encadeamento lógico do raciocínio matemático, assim como às formas perfeitas e absolutas das ideias matemáticas – para os desdobramentos lógico-estruturais[1], que deslocou esse modelo pedagógico para uma vertente psicológica inexistente no pensamento tradicional. A partir dos anos 1960, com a articulação de estudos internacionais e agências como a Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE) e a Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura (UNESCO), evidencia-se a concretização de um movimento internacional de renovação do ensino chamado de Movimento da Matemática Moderna (MMM). No Brasil, esse movimento foi fortalecido em 1961, com a criação dos Grupos de Estudos sobre o Ensino da Matemática (GEEMs), em São Paulo e, em particular, em 1970, a criação dos Grupos de Estudos sobre o Ensino da Matemática de Porto Alegre (Geempas) (LARA, 2001).

É possível perceber que a expressão *matemática moderna* é utilizada como uma estratégia de imposição de sua verdade, em que o *moderno* significa "eficaz" e "de boa qualidade". Outra conotação atribuída ao termo *moderno* corresponde à atualização do ensino, adequando-o às exigências de uma sociedade que passa por um processo crescente de avanço técnico (LARA, 2011). Para Búrigo, "[...] era uma expressão carregada de valorização positiva, numa época em que o progresso técnico ele mesmo era depositário, no modo de pensar dominante, das expectativas de resolução dos principais problemas econômicos e sociais e de conquista do bem-estar [...]" (BÚRIGO, 1990, p. 259).

A matemática moderna emergiu então com outro sentido, por meio das práticas discursivas que resultaram da necessidade de tecnologias de modernização. Nesse

1 Trata-se "[...] da correspondência apontada por Piaget entre as estruturas da inteligência e as 'estruturas-mãe' do edifício matemático desenhado pelo grupo Bourbaki" (BÚRIGO, 1990, p. 262), ou seja, diz respeito ao pensamento lógico-matemático e à construção de conceitos matemáticos.

contexto, busca-se formar estudantes que serão instruídos para se dotar de capacidades técnicas, a fim de garantir o progresso da sociedade a qual pertencem. Tal é o modo de subjetivação de um especialista matemático (LARA, 2011).

O modelo pedagógico tecnicista

Nos Estados Unidos, outra teoria pedagógica buscou tornar a escola mais "eficiente" e "funcional". Trata-se do *tecnicismo* que, entre nós, predominou durante o regime militar pós-1964. Para o tecnicismo, interessava o treinamento de habilidades e a resolução de exercícios-padrão (LARA, 2011). Conforme Fiorentini, em termos sociais e filosóficos, esse modelo se fundamenta "[...] no funcionalismo, para o qual a sociedade seria um sistema organizado e funcional, isto é, um todo harmonioso em que o conflito seria considerado uma anomalia e a manutenção da ordem uma condição para o progresso" (FIORENTINI, 1995, p. 15).

Assim, no Brasil, a ação repressiva da ditadura propiciou novas discussões na educação matemática, na busca de otimizar os resultados da escola, tornando-a "eficiente" e "funcional", como mencionado acima. Tal otimização se daria solucionando os problemas de ensino e aprendizagem, com o uso de técnicas especiais de ensino e de administração escolar (FIORENTINI, 1995). Esse modelo tentou impor suas verdades sobre ensino e aprendizagem, por meio de um discurso "novo": manter a ordem como condição de progresso se tornou a função central da escola, e a finalidade da educação escolar passou a ser "[...] preparar e 'integrar' o indivíduo à sociedade, tornando-o capaz e útil ao sistema" (FIORENTINI, 1995, p. 15).

No tecnicismo, as práticas docentes em relação à aprendizagem da matemática encontram fundamento no *behaviorismo*, que considera as mudanças comportamentais por meio de estímulos. Assim, o ensino se desenvolve por meio da "instrução programada", iniciando a *era da informática*, com o uso de computadores nas escolas, vistos como "máquinas de ensinar". Durante esse período, que foi do final da década de 1960 até o final da década de 1970, passou-se a enfatizar as tecnologias de ensino, como o uso de computadores e calculadoras, principalmente, a fim de planejar, organizar e controlar o processo de ensino e aprendizagem, além do chamado *microensino* e dos laboratórios de aprendizagem (FIORENTINI, 1995).

A propagação de manuais, que se restringiam ao treinamento e ao desenvolvimento de habilidades estritamente técnicas, foi uma das características desse pensamento pedagógico. A imagem da matemática pela matemática permanecia dominante, sendo então reduzida a um conjunto de regras, técnicas e algoritmos.

Na perspectiva tecnicista, o que mudou foi a preocupação básica de se buscar e controlar novos meios para o ensino da matemática, por meio do currículo, da avaliação, de manuais, de materiais de instrução etc. (FIORENTINI, 1995). O que se verificou, nas salas de aula, foi a preocupação de o professor possibilitar que os estudantes se dotassem de habilidades e técnicas mecânicas, tornando-se capazes de resolver exercícios e problemas ainda de forma operativa e mnemônica. Assim, nessa perspectiva, a abordagem psicológica aparecia de forma obscura e sem efeitos no entendimento do ensino e da aprendizagem.

Quanto à reprodução de desigualdades, vieram à tona as questões do fracasso e da evasão escolar das crianças de origem humilde: primeiramente, como uma disfunção da escola, inclusive – e, a partir de uma perspectiva reprodutivista –, como a própria função da escola. Ou seja, todas essas mudanças no sistema de ensino visavam a atender aos requisitos e às necessidades da sociedade. Aliás, pelo menos no que diz respeito à disciplina matemática, parece evidente que todos os modelos e pensamentos pedagógicos descritos até agora reforçavam um discurso de verdade em prol dos interesses das classes dirigentes, fortalecendo a sua hegemonia (LARA, 2011).

O modelo pedagógico construtivista

Como negação das teorias fundamentadas no formalismo clássico, opostas à revelação e à descoberta, surgiram teorias da aprendizagem relacionadas à ideia de construção das estruturas do pensamento lógico-matemático, com base na teoria de Jean Piaget, constituindo a *pedagogia construtivista*. Segundo Marzola,

> [...] o construtivismo emergiu como uma pedagogia que postula uma base científica centrada na psicologia genética. Isto, além de legitimá-lo como uma pedagogia mais avançada e racional que as demais, tornou-o desde logo altamente respeitado nos meios acadêmicos e escolares (MARZOLA, 1995, p. 27).

De acordo com Marzola (1995), estudos e pesquisas publicados nos anos 1980 constataram que o fracasso e a evasão escolar das crianças das classes dominadas eram efeitos dos modos como ocorria a apropriação dos conhecimentos e do modo como estes eram transmitidos. Assim, a mudança educacional deveria partir da mudança do ensino, não apenas em relação aos conteúdos, ou da relação dialógica entre professores e estudantes, mas também pelo respeito ao modo como os estudantes constroem o seu conhecimento.

A vontade de poder do discurso da pedagogia construtivista tinha a pretensão de "revolucionar" o sistema educacional, entendendo que a escola reproduz a sociedade de classes capitalista, não cumprindo sua função específica de ensinar *todas* as crianças (MARZOLA, 1995). A pretensão desse discurso era creditada, segundo Marzola (1995), principalmente à concepção "científica" de como ocorre a aprendizagem, que, portanto, se apresentava como superior e capaz de, por meio própria da ciência, realizar a mudança educacional e social. Ou seja, por postular uma base científica fundada na psicologia genética e sendo legitimado como mais avançado e racional, o construtivismo emergiu como uma pedagogia altamente respeitada no meio acadêmico.

O construtivismo passou a influenciar fortemente as inovações do ensino da matemática, ao se propor a produzir sujeitos autônomos (LARA, 2011) e, de acordo com Fiorentini (1995), a fornecer um maior embasamento teórico que substituiria a prática mecânica, mnemônica e associacionista que existia no ensino da matemática até então.

Apesar de os ideários construtivista e empirista utilizarem materiais concretos, a perspectiva construtivista se opunha à empirista. Nesta, a fonte do conhecimento é o mundo físico, que se impõe por meio de experiências e dos sentidos, sem contar com a reflexão do sujeito. Por outro lado, para o construtivismo, a reflexão é fundamental, e o conhecimento matemático, como todas as formas de conhecimento, é visto como o resultado da ação interativa e/ou reflexiva do sujeito com o meio – no caso, o matemático (LARA, 2001).

Nessa teoria, o professor se torna um colaborador e orientador do chamado "trabalho em grupo", deixando a iniciativa e a condução do trabalho para os estudantes. A preocupação pedagógica consiste em encontrar "[...] meios capazes de favorecer o processo de construção dos conhecimentos, pois é através deste processo que o(a) aluno(a) irá atingir os níveis mais avançados de desenvolvimento conceitual" (MARZOLA, 1995, p. 65).

Desse modo, mais importante do que atingir o objetivo de alcançar os estágios finais do desenvolvimento cognitivo, é a *forma* – o *processo* – como se chega lá. O sujeito matemático, agora em pauta, é aquele capaz de construir seus conhecimentos matemáticos conforme os níveis de desenvolvimento da sua inteligência, para que, por meio do desenvolvimento de suas capacidades intelectuais, seja capaz de pensar com autonomia (LARA, 2011).

No entanto, como adverte Marzola, utilizando o pensamento de Foucault, o processo de mudança educacional deve ser compreendido "[...] *como mudanças nos padrões*

de regulação social, a especificidade didático-pedagógica da escola não se dissocia da sua relação concreta e historicamente constitutiva com a sociedade e o poder político" (MARZOLA, 1995, p. 138, grifo original). Além disso, "[...] é dentro dessa relação que é possível compreender a sua 'função' ou seu sentido, o que ela é ou passa a ser como instituição de controle e regulação social" (MARZOLA, 1995, p. 138).

Nessa mesma perspectiva, Walkerdine (1995) afirma que a teoria do desenvolvimento cognitivo produz uma "verdade" sobre a população infantil, processo esse utilizado para determinar modos de regulação e governança daquela população. O autor também afirma que essa abordagem científica da criança foi inaugurada em uma conjuntura histórica particular, relacionada a importantes mudanças na forma de governo, especialmente das populações urbanas. Trata-se da visão, oferecida por Foucault (1987), da *sociedade disciplinar*. Assim, as concepções científicas "da criança" constituem-se em *dispositivos de controle*, que visam a melhor conhecer a criança, para melhor regulá-la e governá-la.

Portanto, a produção de um sujeito matemático capaz de atingir o raciocínio abstrato, enfatizada pela pedagogia construtivista, disciplina de outro modo, pois tem como base os regimes de verdade criados pela *psicologia do desenvolvimento*.

Até este ponto, no âmbito do ensino da matemática, podemos afirmar que os modelos pedagógicos buscavam a homogeneização dos indivíduos, ou seja, a homogeneização de suas formas de pensar.

Contudo, outra vertente do construtivismo que se instalou e se difundiu, com uma perspectiva diferente da de Piaget, é a *sociointeracionista-semântica*. Esse modo de ver a matemática e seu ensino se apoia, no âmbito psicológico, nas ideias de Vygotsky, que estabelece uma reciprocidade entre *linguagem* e *pensamento*. No âmbito epistemológico, sua fundamentação se encontra, conforme Fiorentini, "[...] no modo como os conhecimentos, signos e proposições matemáticas são produzidos e legitimados historicamente pela comunidade científica ou pelos grupos culturais situados sócio-historicamente" (FIORENTINI, 1995, p. 32).

Nessa visão, o professor é o mediador, cuja capacidade de estabelecer relações é superior à de seus estudantes, sendo aquele responsável, então, pelo planejamento de atividades ricas para a produção, em sala de aula, de significações historicamente produzidas.

No campo da semântica, destacam-se os estudos de Peirce, Bakhtin e Eco:

> As contribuições dessa tendência para a educação matemática emergem a partir dos anos 1990, principalmente com os estudos de Lins, que vê a matemática 'como um texto ou um discurso com uma linguagem própria, constituída historicamente de símbolos que possuem duas faces: significante (que é a própria matemática – um texto) e significado (que é o conhecimento matemático – as afirmações/justificações)' (MARZOLA, 1995, p. 33-34).

Com isso, a matemática passa a fazer sentido a partir do seu *significado*. Tanto Piaget quanto Vygotsky escreveram teorias pertencentes às correntes interacionista e construtivista. Entretanto, Vygotsky, partindo de uma perspectiva marxista, defende que o ser humano tem uma criação histórica e social, e daí vem a importância da linguagem e sua interação com o outro, bem como a ênfase dada pelo autor ao papel da interação social ao longo do desenvolvimento das crianças. Na perspectiva de Vygotsky, a aprendizagem dos estudantes se constrói à medida que eles interagem e se relacionam com outros indivíduos e com o seu ambiente sociocultural, tendo como suporte indivíduos mais experientes. Percebe-se o quanto, cada vez mais, os estudantes assumem seu papel ativo nos processos de ensino e aprendizagem e necessitam do professor para fazer com que a matemática seja significante.

Em sala de aula, a utilização de materiais manipulativos e a resolução de situações-problema relacionadas a eventos conflitantes presentes no cotidiano dos estudantes se tornam um dos focos do processo de ensino.

O modelo pedagógico socioetnocultural

Foucault afirmou que, nos últimos tempos, não apenas a sociedade mudou, mas os indivíduos também: "[...] eles são cada vez mais diversos, diferentes e independentes. Há cada vez mais categorias de pessoas que não estão submetidas à disciplina, de tal forma que somos obrigados a pensar o desenvolvimento de uma sociedade sem disciplina" (FOUCAULT, 2003, p. 268).

Essa preocupação é a mesma de Valerie Walkerdine, ao questionar as "metanarrativas da ciência", nas quais o "pensamento abstrato" é o pináculo do ser civilizado e o "raciocínio 'abstrato' deixa de levar em conta a produção do pensamento nas práticas reais" (WALKERDINE, 1995, p. 209). Essa mesma autora mostra inquietação ao alertar: "Quando nós tratamos o mundo como abstrato, nós 'esquecemos' as práticas que nos formam, os significados nos quais nós somos produzidos, 'esquecemos' a história, o poder e a opressão" (WALKERDINE, 1995, p. 222).

Ou seja, quando nos damos conta de que a produção do pensamento ocorre nas práticas, sendo repleta de significados e emoções complexas que se manifestam de diferentes modos em cada indivíduo, faz-se necessário repensar certos pressupostos dos modelos pedagógicos vigentes até então, que levam em conta um ensino e uma aprendizagem em massa. Trata-se de uma visão "bancária" da educação, na qual, segundo Paulo Freire, o professor se limita apenas a "depositar" as informações na cabeça de seus estudantes, vistos, portanto, como "recipientes" vazios que devem ser preenchidos.

Como crítica a essa "educação bancária", passou-se a se discutir com mais ênfase a questão da *cultura*, surgindo então a tendência *socioetnocultural* que coloca sob suspeita a função do professor de apenas transmitir o conhecimento pronto e acabado, privilegiando uma valorização do saber trazido pelos estudantes. Esse modelo pedagógico se fundamenta nas ideias pedagógicas de Paulo Freire e na etnomatemática de Ubiratan d'Ambrosio.

Assim, ganham destaque discussões que questionam a *diversidade dos indivíduos*. Para d'Ambrosio, a matemática é parte integrante de nossas raízes culturais, inerentes a um processo civilizatório: "São raízes culturais associadas às mesmas raízes que estão identificadas com a expansão da civilização ocidental, e assim associadas a um sistema de dominação política e econômica que resultou desse processo de expansão" (D'AMBROSIO, 1993, p. 14).

A partir dessa perspectiva, emergem, no Brasil, várias pesquisas e estudos, entre os quais se destacam os de Carraher, Carraher e Schliemann (1988), Carraher (1989), Danyluk (1991), d'Ambrosio (1984) e Knijinik (1993, 1996), que apontam para a importância do contexto cultural na educação matemática e para a divisão entre *matemática acadêmica*, *matemática escolar* e a *matemática advinda de diferentes contextos culturais* que não são valorizados pela escola.

O intuito desses estudos consiste em trazer à tona uma "matemática viva", que está presente no dia a dia dos estudantes. Nesse modelo, questiona-se a matemática escolar como o único tipo possível, o que coloca sob suspeita a universalidade da matemática tal como é ensinada na escola. Instituem-se "as matemáticas" dos diferentes povos e etnias. Do discurso da etnomatemática, emerge a ideia de *diferentes matemáticas*, todas de igual valor.

D'Ambrosio tem como base a ideia de um currículo dinâmico, que reconhece a heterogeneidade das classes nas sociedades modernas, nas quais os estudantes têm interesses variados e uma enorme gama de conhecimentos. Então, a educação é

redefinida como uma estratégia desenvolvida pelas sociedades para estimular cada indivíduo a colaborar com outros em ações comuns, na busca do bem comum e, da mesma forma, para que os indivíduos atinjam seu pleno potencial criativo. No que se refere à educação matemática, essa estratégia é, para d'Ambrosio, a *etnomatemática* (LARA, 2011).

D'Ambrosio é o principal idealizador do programa da etnomatemática, tendo como pretensão a emergência de uma "nova" teoria da cognição. Para esse autor, "[...] cada grupo cultural tem suas formas de matematizar" (D'AMBROSIO, 1993, p. 17). E é a existência dessas diferentes formas de matematizar, que vão além da mera utilização de técnicas, habilidades e práticas, que torna possível e necessário pensar em posturas conceituais distintas e em enfoques cognitivos distintos.

Ao partir do pressuposto de que a realidade na qual o sujeito está imerso é a fonte primeira de conhecimento e que, portanto, esse conhecimento emerge de modo total, holisticamente, d'Ambrosio rompeu com a ideia de *conhecimento disciplinar* vigente até então. Ele afirma que, ao se estabelecer normas com o intuito de arranjar o conhecimento em uma "ordem" disciplinar, outras manifestações de conhecimento, que não obedecem àquelas normas, ficam excluídas. Assim, para d'Ambrosio (1993a), o fato de ser possível explicar, conhecer, entender, manejar e lidar com a realidade fora do contexto holístico faz com que tenhamos apenas visões parciais e incompletas da realidade. Desse modo, um "esquema disciplinar" é essa forma fragmentada de ver o mundo e que nos oferece apenas visões parciais.

Com essa perspectiva, pretende-se redirecionar os modos de ver a matemática como um conhecimento a-histórico e atemporal, assim como sua aplicabilidade universal e sua intensidade nos currículos escolares. O que essa nova vertente propõe é:

> • uma matemática útil como instrumentadora para a vida, que produza estudantes capazes de manejar situações do seu cotidiano, por meio da modelagem, da formulação de problemas, da relação dos conhecimentos matemáticos com as demais ciências, e do uso de estatísticas, estimativas e probabilidades;
>
> • uma matemática útil como instrumentadora para o trabalho, que se utilize de problemas e recursos atuais, entre eles os computadores e as calculadoras;
>
> • uma matemática articulada com formas culturais distintas de matematizar, associadas ao contexto cultural dos estudantes, que valorizem e utilizem seu conhecimento matemático prévio (D'AMBROSIO, 1993, p. 16-17).

É perceptível que o caráter holístico atribuído a esse outra forma de ensinar e aprender faz com que se coloque em primeiro plano o desenvolvimento de *competências múltiplas* e de *modos multiculturais*. Ao tratar de questões da realidade dos estudantes e assumir um enfoque holístico, a etnomatemática possibilita pensar em um *ensino transdisciplinar*.

A pretensão da etnomatemática consiste em fornecer condições que tornem possível a visão de um sujeito multicultural, do qual se possa extrair o máximo de energias inteligentes. Ressalta-se, ainda, que a modelagem, ao aliar teoria e prática, possibilita que o sujeito se torne cada vez mais capaz de dar conta dos problemas que o cercam. Como efeito disso, a *modelagem matemática* se mostra como uma das principais ferramentas do ensino em um contexto etnomatemático (LARA, 2011).

Considerações finais

Este texto teve a pretensão de apresentar um panorama geral sobre os modos de ver a matemática e o seu ensino no Brasil. A partir desses diferentes modos, instituídos nas escolas por meio de diferentes crenças e pressupostos presentes nas práticas docentes, é possível mostrar que os processos de ensino e aprendizagem são pensados de formas diversas e produzem estudantes com habilidades e competências diferenciadas.

Tal produção é possível e eficaz em diferentes momentos históricos, pois, em cada um desses momentos, o sujeito que se quer produzir é diferente. Assim, compreende-se o porquê de cada um desses modelos pedagógicos ter se tornado hegemônico em sua emergência, e talvez obsoleto para formar os estudantes da atualidade. As turmas em cada série/ano são compostas por uma grande diversidade, não apenas cultural, mas também em relação ao nível cognitivo dos estudantes.

Contudo, é nas regularidades e nas descontinuidades desses discursos que os indivíduos se complementam, produzindo historicamente a posição central que a matemática ocupa entre as demais ciências. As diferentes configurações assumidas pela sociedade deslocaram o modo de se ver a matemática e o seu ensino, o que assinala, portanto, modificações no modo de produção de subjetividades (LARA, 2011).

O sujeito esperado no contexto atual deve ser mais polivalente, mais flexível e mais multicultural (LARA, 2007). Desse modo, um modelo de ensino que estratifica os indivíduos em diferentes níveis intelectuais e não reconhece a sua heterogeneidade pode se tornar ineficaz. A perspectiva d'ambrosiana considera, como formas de etnomatemática, a matemática praticada pelos matemáticos e por categorias

profissionais específicas; a matemática escolar, legitimada; a matemática que é usada nas brincadeiras infantis; a matemática praticada pelas mulheres e pelos homens para atender às suas necessidades de sobrevivência; entre outras. Com isso, o conhecimento matemático escolar passa a ser visto como *apenas uma* das suas formas possíveis.

Diante disso, destaca-se que o professor deve perceber a importância da *transdisciplinaridade* como um enfoque holístico ao conhecimento, fundamentado no resgate das várias dimensões do ser humano (D'AMBROSIO, 2004). Desse modo, talvez seja possível compreender não apenas os objetos de estudo (matemática, ensino e estudante), mas fazer com que os estudantes aprendam a lidar com o mundo como um todo, na sua integralidade.

Bibliografia

BICUDO, I. Educação matemática e ensino da matemática. *Temas e Debates*. São Paulo, n. 3, p. 31-42, 1991.

BÚRIGO, E. Z. Matemática moderna: progresso e democracia na visão de educadores brasileiros nos anos 60. *Teoria & Educação*. Porto Alegre, n. 2, p. 255-265, 1990.

CARVALHO, João Bosco Pitombeira. O que é educação matemática. *Temas & Debates*. São Paulo, v. 4, n. 3, p. 17-26, 1991.

D'AMBROSIO, U. *Da realidade à ação*: reflexões sobre educação e matemática. 2.ed. São Paulo: Unicamp, 1986.

D'AMBROSIO, U. *Educação matemática da teoria à prática.* 4.ed. São Paulo: Papirus, 1998.

D'AMBROSIO, U. *Etnomatemática*. 2.ed. São Paulo: Ática, 1993.

D'AMBROSIO, U. Etnomatemática: um programa. *A Educação Matemática em Revista*. Blumenau, v. 1, p. 5-11, 1993a.

D'AMBROSIO, U. A história da matemática: questões historiográficas e políticas e reflexos na educação matemática. In: BICUDO, Maria Aparecida; BORBA, Marcelo de Carvalho (Orgs.). *Educação matemática*: pesquisa em movimento. São Paulo: Cortez, 2004. p. 13-29.

FIORENTINI, D. Alguns modos de ver e conceber o ensino de matemática no Brasil. *Zetetiké*. São Paulo, v. 3, n. 4, p. 1-37, 1995.

FOUCAULT, M. *Arqueologia do saber*. 6.ed. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 1995.

FOUCAULT, M. *Ditos e escritos*: estratégia, poder-saber, v. 4. Rio de Janeiro: Forense Universitária, 2003.

FOUCAULT, M. *Microfísica do poder*. 20.ed. Rio de Janeiro: Graal, 2004.

FOUCAULT, M. *Vigiar e punir*: nascimento da prisão. Petrópolis: Vozes, 1987.

LARA, I. C. M. A constituição histórica de diferentes sujeitos matemáticos. *Acta Scientiae*. Canoas, v. 13, n. 2, p. 97-114, jul./dez. 2011.

LARA, I. C. M. *Exames nacionais e as "verdades" sobre a produção do professor de matemática.* 2007. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

LARA, I. C. M. *Histórias de um "lobo mau"*: a matemática no vestibular da UFRGS. 2001. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

HERSH, R.; DAVIS, P. *A experiência matemática.* Rio de Janeiro: Francisco Alves, 1989.

MANACORDA, M. A. *História da educação*: da Antiguidade aos nossos dias. 2.ed. São Paulo: Cortez, 1989.

MARZOLA, N. R. *A "reinventação da escola" segundo o construtivismo pedagógico:* para uma problematização da mudança educacional. 1995. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre.

PAVANELLO, Regina Maria. O que ensinar de matemática hoje. *Temas & Debates.* São Paulo, v. 2, n. 2, p. 7-9, 1989.

WALKERDINE, V. O raciocínio em tempo pós-modernos. *Educação & Realidade*. Porto Alegre, v. 20, n. 2, p. 207-226, 1995.

Considerações sobre o debate contemporâneo da educação matemática no Brasil

Felipe Augusto Bellé

Introdução

O ensino da matemática no Brasil teve início ainda no período do Descobrimento, durante o Brasil Colônia (1500-1822), quase como uma prerrogativa dos jesuítas. Apesar de incipiente e de abranger um ínfimo número de estudantes e conteúdo, ao longo do tempo, com a expansão dos temas matemáticos e científicos, o Brasil foi desenvolvendo e alcançando a expansão e a massificação do ensino. Segundo Gomes, "a Constituição de 1824, que prevaleceu durante todo o Período Imperial (1822-1889), afirmava a gratuidade da instrução primária para todos os brasileiros" (GOMES, 2012, p. 15) e, com a Lei de Instrução Pública Nacional, de 15 de outubro de 1827, foram estabelecidas escolas de primeiras letras em todas as cidades, vilas e lugares populosos. Assim, esse ensino significava, afinal, "ler, escrever e contar".

Porém, Gomes (2012) expõe que, ainda no período da Proclamação da República, cerca de 85% da população se mantivera analfabeta, devido aos problemas de expansão da oferta do ensino no país, tanto nos sentidos econômicos e administrativos, como por segmentações de gênero e etnia. Foi a partir do início do Brasil República que a educação efetivamente se desenvolveu. Nessa época e até os períodos atuais, a educação atingiu consensos e reformas que viabilizaram sua expansão e efetivação pelo país, sendo incluída e reconhecida – assim como o ensino da leitura e escrita – a importância da matemática para a vida individual e social.

Nos períodos recentes, o debate tem emergido no que diz respeito às dificuldades, aos métodos, à modelagem e aos objetivos da educação para os indivíduos, abarcando assim o ensino da matemática. O debate surgiu devido ao baixo desempenho apresentado pelos estudantes em provas como o PISA[1], o TIMSS[2] e mesmo nos IDEB[3] das escolas. O déficit educacional da população brasileira e o problema do ensino atual são deveras

1 *Programme for International Student Assessment*, coordenado pela Organização para a Cooperação e Desenvolvimento Econômico (OCDE).
2 *Trends in International Mathematics and Science Study*, estabelecido pela Associação Internacional de Avaliação de Rendimento Escolar (IEA).
3 Índice de Desenvolvimento da Educação Brasileira, criado pelo INEP para avaliar a qualidade da educação brasileira.

relevantes e se refletem em diversos aspectos da atualidade. Avaliando a importância desta, sucede-se que a matemática é necessária em diversos aspectos quantitativos da realidade e do desenvolvimento do raciocínio lógico, estando presente direta e indiretamente na vida das pessoas.

Em Brasil (2004), observa-se a necessidade de saber e compreender a matemática na vida cotidiana de todos os cidadãos, por vezes de forma explícita e por vezes de forma sutil. Ver e ler as horas, compreender notícias de jornais, comunicar variáveis e tantas outras questões do dia a dia são ações que envolvem linguagem matemática. Explana-se que quase tudo requer a compreensão de um "certo conhecimento matemático e um domínio mínimo da linguagem", como a leitura de porcentagens, gráficos ou tabelas, importantes na descrição e na análise de vários assuntos (BRASIL, 2004, p. 3). Assim, a matemática é cada vez mais necessária com o avanço da sociedade, principalmente devido ao progresso tecnológico. Descrever, modelar e resolver problemas nas diversas áreas da atividade humana são ações da educação matemática.

Destacado o valor da matemática para a vida humana, evidencia-se a crescente necessidade de se encontrar métodos e meios de realizar a transferência ou construção do conhecimento nos estudantes, bem como de elevar suas motivações e desejos quanto ao aprendizado da matéria. Grande parte das discussões realça a importância do papel dos professores como transmissores e estimuladores de aprendizados, que oferecem formas e informações de buscar o saber. Portanto, a interação de professores e educandos é um dos fatores para o sucesso educacional.

Os próximos tópicos constituem um breve mapeamento das produções nacionais e a apresentação de alguns artigos, com o intuito de expor os assuntos de maior predominância no tema da educação matemática. Foram analisadas publicações em periódicos, revistas sobre educação, livros e outros meios de disseminação de informações. O objetivo do artigo consiste em explicitar o atual debate entre pesquisadores e educandos no Brasil.

Mapeamentos na educação matemática

A discussão acerca da educação matemática no Brasil é ampla e diversificada. Por meio dos principais periódicos e revistas da área, pode-se verificar a relevância do tema, considerando ainda a presença de grupos e centros de pesquisa. Somado a isso, a Sociedade Brasileira de Educação Matemática (SBEM) participa, divulga e promove discussões sobre o tema no Brasil, com elevada repercussão.

No final dos anos 1990, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais (INEP) divulgou um trabalho denominado de "Mapeamento de educação matemática no Brasil, 1995: pesquisas, estudos, trabalhos técnico-científicos por subárea temática". Esse mapeamento foi resultado do levantamento e da consolidação de respostas aos instrumentos de coleta de dados enviadas ao INEP, por instituições e profissionais que pesquisam a educação matemática no Brasil. Dessa forma, objetivou-se "democratizar o conhecimento e fornecer elementos necessários para a construção de novas práticas pedagógicas em que a educação não dissocie a escola da vida em sociedade" (INEP, 1997, p. 10).

O documento expõem ainda que o mapeamento efetuado "é da maior importância da educação brasileira. Revela a produção de um grupo que atingiu competência, nacional e internacional reconhecida, em uma das áreas mais críticas dos sistemas educacionais" (INEP, 1997, p. 11). Elucida ainda que

> a divulgação do mapeamento entre os educadores brasileiros virá confirmar a importância dessa área de pesquisa e destacar o valor e a competência de vários pesquisadores e das várias linhas de pesquisa que vêm recebendo maior atenção no país. Embora não completo, o mapeamento é um indicador da vitalidade e da competência acadêmica da Educação Matemática no Brasil (INEP, 1997, p. 12).

Por conseguinte, o mapeamento realizado pelo INEP se constitui de artigos nas seguintes subáreas temáticas: *avaliação*, *didática e ensino da matemática*, *etnomatemática*, *formação de professores*, *história da matemática e história do ensino da matemática* e *psicologia do ensino e da aprendizagem matemática*. Foi abrangido um total de 67 trabalhos, com a maior parcela (40,30%) na subárea didática e ensino da matemática; eles foram localizados, majoritariamente, nas Regiões Sudeste e Sul. O trabalho demonstra a longa trajetória do debate no sistema educacional brasileiro, com eminência e destaque do tema ainda nos anos 1990.

Avaliando a produção de revistas das áreas de educação e educação matemática, Fuchs (2012) realizou um mapeamento em janeiro de 2012, buscando avaliar e constatar os principais periódicos nacionais, dados os objetivos, as instituições responsáveis e as avaliações no sistema Qualis de avaliação da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (Capes). Ao todo, foram observadas 47 revistas sobre o tema ou afins, que produzem repercussões nos âmbitos regional, nacional e até mesmo internacional. Por fim, considerando o sistema Qualis, verifica-se que, ao todo, 11 revistas estão no nível A, sendo cinco no nível A1 e seis no nível A2, enquanto as

restantes variam entre os níveis B1 e B5. Dessa forma, o trabalho expõe a elevada fonte de disseminação de informação na área, contendo revistas com diferentes ênfases.

Rosa e outros (2012) realizam um levantamento sobre as tendências em educação matemática que foram apresentadas no Grupo de Trabalho 19 da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisa em Educação (Anped) de 2012. Esse espaço representa um importante fórum para a exposição e o debate de parte significativa da produção científica na área de educação matemática.[4] Além disso, os autores manifestam que:

> as investigações em educação matemática são recentes, realizadas no Brasil há pouco mais de 50 anos. Trata-se de uma área em consolidação, cujo desafio ainda é 'encontrar a adequada articulação e/ou diálogo entre o específico e o não específico da educação matemática' (FIORENTINI, 2002, p. 14 apud ROSA et al., 2012, p. 3).

A pesquisa buscou responder sobre quais foram as tendências temáticas presentes no GT 19 da Anped 2012. Dessa forma, os autores se utilizaram da hipótese de que

> após 12 anos da constituição do GT 19, haveria uma variedade de pesquisas em âmbito nacional distribuída em diferentes focos temáticos; porém com maior ênfase na utilização de tecnologias de informação e comunicação (TIC), devido à efervescência destas nas escolas das diferentes redes e níveis de ensino (ROSA et al., 2012, p. 6).

Porém, os resultados mostraram que a caracterização dos trabalhos foi aferida em apenas três áreas de estudo da educação matemática: *processo de ensino e aprendizagem da matemática*; *práticas docentes, crenças, concepções e saberes práticos*; e *conhecimentos e formação/desenvolvimento profissional do professor*. Assim,

> as demais tendências, tais como mudanças curriculares, utilização de tecnologias de informação e comunicação no ensino e na aprendizagem da matemática, práticas de avaliação e contexto sociocultural e político do ensino-aprendizagem da matemática não foram mobilizadas (ROSA et al., 2012, p. 15).

Além disso,

> O mapeamento das pesquisas em educação matemática apresentadas no GT 19 da Anped 2012 indica que os três fatores que determinaram a origem da educação matemática, como a preocupação com a qualidade da divulgação das ideias matemáticas às novas gerações, a formação de professores e o ensino e aprendizagem da matemática permanecem entre as temáticas atuais das pesquisas em educação matemática no Brasil (ROSA et al., 2012, p. 15).

4 Para mais informações sobre o GT 19 da Anped, acessar: <http://www.anped.org.br>.

Portanto, a hipótese dos autores foi refutada, ou seja, Rosa e outros explicitam que "não houve uma variedade de pesquisas distribuídas em diferentes focos temáticos, conforme acreditávamos inicialmente" (ROSA et al., 2012, p. 16). De tal modo, a expectativa inicial acerca da presença de trabalhos sobre a utilização de TIC e da "tendência relacionada ao contexto sociocultural e político do ensino-aprendizagem da matemática, ao qual insere-se a etnomatemática" não foi representada em 2012 no GT 19 da Anped, o que surpreendeu os autores (ROSA et al., 2012, p. 16).

Maria Salett Biembengut apresenta um mapeamento das ações pedagógicas com modelagem matemática, estruturando e elaborando um "mapa da modelagem na educação, uma vez que esse movimento, iniciado há três décadas, inaugurou um novo caminho de promover conhecimentos, novas formas de transmitir experiências e novas concepções matemáticas" (BIEMBENGUT, 2009, p. 7). A autora sinaliza que o movimento pela modelagem matemática na educação começou no final dos 1970 e início dos anos 1980, conquistando cada vez mais adeptos. Com isso, "discussões desde como se faz um modelo matemático e como se ensina matemática ao mesmo tempo permitiram emergir a linha de pesquisa de modelagem matemática no ensino brasileiro" (BIEMBENGUT, 2009, p. 8).

Ao todo, Biembengut identifica 288 trabalhos acadêmicos, 836 artigos e 112 cursos de licenciatura que têm a disciplina de *modelagem na educação* ou que abordam o tema, em um período de 30 anos de pesquisas em modelagem matemática. Ela esclarece que:

> o mapeamento sobre o estado atual das ações pedagógicas de modelagem matemática na educação brasileira pode oferecer uma cena, ainda que possa parecer incompleta. Temos vestígios dos começos, mas não há inferências quanto às vertentes que se darão os caminhos que ainda serão percorridos e as palavras a serem pronunciadas, uma vez que esse movimento pela modelagem, iniciado há três décadas, inaugurou novo caminho de promover conhecimentos, novas formas de transmitir experiências e novas concepções matemáticas, multiplicando-se proficuamente (BIEMBENGUT, 2009, p. 25).

Por fim, ilustra que "apesar desse crescente interesse pela modelagem, há poucas evidências e certo 'sintoma' ou 'percepção' sobre mudanças na educação frente ao número de adeptos e interessados" e que, com isso, não se "dispõe como é entendida e adotada pelos professores que tomaram ciência da modelagem matemática na educação brasileira" (BIEMBENGUT, 2009, p. 28).

Seguindo a linha de trabalho utilizada em INEP (1997), Fuchs (2012), Rosa e outros (2012) e Biembengut (2009), o trabalho "Mapeamento da educação matemática no

Brasil" (mimeo)[5] realizou, com auxílio da ferramenta de busca do Portal de Periódicos Capes/MEC[6], um mapeamento na busca de artigos e periódicos que abrangessem e tratassem de temas como *avaliação e métodos de ensino*, *modelagem matemática*, *o lúdico e o ensino*, *abordagens e experiências didáticas*, e outros fatores que envolvessem a educação matemática. Procurou-se demonstrar e apresentar o estado atual do debate brasileiro nessas subáreas. Assim, a investigação teve como resultado a seleção e a consideração de um total de 106 artigos, datados de períodos mais recentes e que representassem uma breve amostra da amplitude e dos temas que pesquisadores e docentes têm abordado.

Dessa forma, os artigos avaliam e consideram desde a visão dos estudantes quanto ao aprendizado até o sentido da matemática em suas vidas e em sua formação. Propostas a serem utilizadas pelos educadores em sala de aula, concepção do uso de jogos, manipuláveis e musicalização e, ainda, a importância da interação de docentes e discentes também foram abrangidos. Por fim, estão incluídos no mapeamento trabalhos na área que buscam avaliar como o autoconceito dos estudantes e o ambiente de sala de aula são relevantes para a explicação do rendimento acadêmico.

Apesar da ampla diversidade dos temas encontrados, evidenciou-se a concentração de trabalhos sobre *didática* e *ensino da matemática*, seguindo a tendência apresentada ainda em 1997 pelo INEP e, mais recentemente, por Rosa e outros (2012).

Com o objetivo de expor o estado do debate da educação matemática quanto à didática e ao ensino em sala de aula, é explanada a seguir uma seleção de artigos providos pelo mapeamento. Espera-se que o conjunto abarcado permita um bom julgamento acerca da atualidade da discussão sobre esse tema nas publicações nacionais. Apesar de representarem poucos do total de artigos encontrados no mapeamento, os temas selecionados foram os que apresentaram maior frequência durante a pesquisa.

Didática, ensino e experiências

Tratando do ensino em sala de aula, salienta-se que o professor não é um mero instrumento de transferência de aprendizado aos estudantes. É reconhecido que um ensino com base na memorização, em regras ou estratégias não contribui para a boa

5 Trabalho acadêmico realizado em 2014 por Felipe Augusto Bellé no projeto Educação e Desenvolvimento Humano, com apoio do Programa Institucional de Bolsas de Iniciação Científica do Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (Pibic-CNPq). O trabalho não foi publicado, mas está disponível em: <https://goo.gl/DePBEn>.
6 Disponível em: <http://www.periodicos.capes.gov.br>.

formação dos estudantes. Assim sendo, o documento pubicado pelo Ministério da Educação adverte que, quando o ensino

> estimula a construção de estratégias para resolver problemas, a comprovação e a justificativa de resultados, a criatividade, a iniciativa pessoal, o trabalho coletivo e a autonomia advinda da confiança na própria capacidade para enfrentar desafios, a matemática contribui para a formação dos jovens e adultos que buscam a escola (BRASIL, 2002, p. 11).

Não apenas para jovens e adultos, essa metodologia de ensino também promove o saber de forma mais construtiva e incentivadora para as crianças, impactando positivamente o seu aprendizado. Visto isso, enfatiza-se a importância em:

> identificar os conhecimentos matemáticos como meios para compreender e transformar o mundo à sua volta e perceber o caráter de jogo intelectual, característico da matemática, como aspecto que estimula o interesse, a curiosidade, o espírito de investigação e o desenvolvimento da capacidade para resolver problemas (BRASIL, 2002, p. 17).

Dessa forma, o desenvolvimento da segurança e do reconhecimento da capacidade de os educandos construírem a matemática em si mesmos promulga ainda o progresso da autoestima e da perseverança no próprio aprendizado. Provocar a curiosidade dos estudantes ajuda a criar a base para um aprendizado sólido, por meio da compreensão de processos envolvidos no conhecimento, de modo a incentivar os estudantes a formular novos problemas e resolver questões do seu jeito.

Jogos, manipuláveis e o ensino

A utilização de jogos como método de ensino tem sido destacada em diversos artigos de periódicos nacionais. Em vista disso, Abrão e Silva criticam o ensino tradicional pautado em modelos pré-fabricados, fundamentados na memorização e na repetição, propondo assim que "pode-se superar o ensino tradicional quando o professor elenca maneiras de fazer com que os alunos se sintam convidados a pensar um passo à frente do que foi ensinado, isto é, para além dos exercícios" (ABRÃO; SILVA, 2011, p. 68), buscando estimular os estudantes a quererem saber mais sobre o desconhecido. De tal modo, os educadores "passam a utilizar ferramentas com intencionalidade pedagógica que divergem ao modelo tradicional de ensino, com vistas a melhorar o desempenho dos alunos, surgindo assim o uso dos jogos na sala de aula" (ABRÃO; SILVA, 2011, p. 69). A ânsia pelo brincar, atrelada ao processo

de aprendizado, resulta no avanço do saber, de forma mais incentivadora e prática para os estudantes.

Remetendo ao uso de jogos, Abrão e Silva expõem que estes são "excelentes recursos para despertar o modo de pensar e de raciocinar das crianças". Seu uso viabiliza "a busca de informações, a interação com o outro, com o pensamento espontâneo, com o improviso e com o formal, servindo de projeção, bem como de suporte as descobertas" (ABRÃO; SILVA, 2011, p. 72). Assim, o uso de jogos permite uma ruptura do modelo tradicional de ensino, o qual tem como base a exposição de conteúdo, possibilitando ainda que a forma lúdica ajude na construção dos conceitos matemáticos. Abrão e Silva colocam ainda que os jogos podem se tornar instrumentos avaliativos, melhorando "o processo de ensino aprendizagem, podendo ser empregados para construir autoconfiança e motivação" (ABRÃO; SILVA, 2011, p. 78).

Por fim, Abrão e Silva explanam que os jogos em geral são vistos apenas como passatempo e não como instrumentos pedagógicos, os quais possibilitam estimular a construção de habilidades matemáticas específicas. Assim visto, "aprendizagens só são capazes de ocorrer se o condutor do jogo, ou seja, o professor, seja capaz de explorá-lo, fazendo com que os alunos modifiquem comportamentos e atitudes, proporcionando um amadurecimento cognitivo" (ABRÃO; SILVA, 2011, p. 79). Assim, a utilização de jogos como forma de ensino requer esforços por parte dos professores, pois estes deverão articular os conteúdos programáticos com as brincadeiras.

Conti e Vasconcelos também exploram o uso de jogos como forma didática. Descrevem que "com os jogos, os alunos constroem conhecimentos de uma maneira que nem suspeitavam existir e, quando descobrem que tudo o que acabaram de fazer foi matemática, eles se impressionam, passam a admirar a matéria e a gostar cada dia mais dela" (CONTI; VASCONCELOS, 2013, p. 302). Visto que as aulas de matemática são, em parte, responsáveis pela evasão escolar de estudantes, propor meios de ensino que tornem o aprendizado da matemática mais interessante e menos temido é uma ação de grande valia para o sistema educacional. Assim, "a melhor maneira de se ensinar matemática é mergulhar as crianças num ambiente onde o desafio matemático esteja naturalmente presente" (D'AMBROSIO, 1990, p. 30 apud CONTI; VASCONCELOS, 2013, p. 302).

O prazer e a felicidade observados nos estudantes quanto à proposição de utilizar jogos como meios de ensino são evidentes, pois eles estimulam o estudantes ao envolvimento e à ação. As características e os materiais dos jogos promovem ainda

o interesse e a curiosidade dos estudantes em conhecê-los, principalmente quando são relacionados ao seu cotidiano. Todavia, com a utilização dessa didática, surgem novas dificuldades, tal que:

> [...] um jogo não pode ser inserido em uma aula de uma forma qualquer: ele deve ser estudado e analisado pelo professor, observando o que deseja e o que pode ensinar através dele. Para que os alunos consigam aprender por meio de um jogo, é importante que consigam entendê-lo, testá-lo, observar reações dos parceiros e, por fim, jogá-lo (CONTI; VASCONCELOS, 2013, p. 304).

Um aspecto importante a ser tratado com o uso de jogos no ensino é a necessidade de estudar o que foi realizado, para que faça sentido aos estudantes. Deve-se, então, "retomar com eles o que aprenderam e qual o conteúdo que já sabem fazer sem 'ter estudado'", realizando uma breve escrita do que eles desenvolveram (CONTI; VASCONCELOS, 2013, p. 304).

Conti e Vasconcelos adotaram, em três turmas do 8º ano do ensino fundamental do município de Piracaia (SP), uma abordagem diferente de ensino, "propondo a criação de jogos e deixando que eles próprios determinassem a quantidade de alunos nos grupos de trabalho, desde que não ultrapassasse quatro por grupo" (CONTI; VASCONCELOS, 2013, p. 305). Os jogos deveriam ser de tabuleiro, ter um nome e a descrição das regras, objetivando o aprendizado de forma prazerosa, a exploração da criatividade e o desenvolvimento do raciocínio lógico. A descrição do jogo deveria ser bem exposta, tal que outros jogadores não tivessem dificuldades para se aventurar. A reflexão acerca do trabalho proposto foi bastante positiva, seja pelo modo como os estudantes se interessaram pela prática, bem como pelas dúvidas que surgiram ao longo da elaboração – como a observação de que a matemática não é apenas "fórmulas". A construção e a conexão do que foi jogado com a teoria foram reconhecidas pelos estudantes, corroborando a hipótese da pesquisa de que o uso de jogos é benéfico como forma de ensino.

Apontando o emprego de materiais manipuláveis como forma de ensino, Boas e Barbosa analisaram e observaram como estudantes do 9º ano do ensino fundamental de uma escola da rede pública de Salvador participam de uma aula usando tal método. Diversos autores apontados por Boas e Barbosa chamam atenção para possíveis problemas e divergências na utilização de manipuláveis como forma de ensino da matemática. Porém, a investigação realizada por eles centrou-se em avaliar "a participação dos alunos na aula de matemática ao utilizar os materiais manipuláveis" (BOAS; BARBOSA,

2013, p. 3), observando se ocorre engajamento ativo por parte dos educandos. Assim, a prática de manipuláveis no ensino ainda faz "parte de uma prática social, em que sujeitos, professores e alunos interagem uns com os outros, engajados em atividades com significados compartilhados" (BOAS; BARBOSA, 2013, p. 5).

O estudo dirigido por Boas e Barbosa teve caráter qualitativo, com os dados coletados no cenário de sala de aula, por meio de gravação em vídeo, "na tentativa de dar sentido e/ou interpretar o fenômeno" do uso de manipuláveis (BOAS; BARBOSA, 2013, p. 7). A análise dos dados se deu por meio da transcrição e da categorização da filmagem em sala de aula, ambas avaliadas repetidamente. Os resultados provaram uma participação mais ativa por parte dos estudantes, seja no reconhecimento do manipulável como objeto matemático ou nas justificativas das fórmulas de cálculos de área com o uso de artefatos. Por fim,"os manipuláveis podem ter um papel importante na aprendizagem matemática, já que oferecem uma representação táctil que pode ser usada para ajudar os alunos a visualizar objetos matemáticos" (LAMBERTY; KOLODNER, 2002 apud BOAS; BARBOSA, 2013, p. 15).

Modelagem matemática

Assim como Biembengut (2009), Tambarussi e Klüber explicitam que "a modelagem matemática, na perspectiva da educação matemática, é uma prática educativa relativamente recente no Brasil. Essa tendência é considerada uma área ainda em expansão, mas que já se constitui em um importante foco de discussão e pesquisa" (TAMBARUSSI; KLÜBER, 2014, p. 201-202), estando, com isso, em consolidação no âmbito da educação matemática.

Em Tambarussi e Klüber, a investigação buscou responder à seguinte questão: "o que revelam os focos das pesquisas em modelagem matemática na educação matemática?" (TAMBARUSSI; KLÜBER, 2014, p. 209), utilizando-se do banco de teses da Capes e selecionando um total de 66 trabalhos sobre o tema produzidos entre 1989 a 2011. Além de realizarem uma descrição dos focos das dissertações e teses, os autores também interpretaram de maneira qualitativa os significados desses focos para a pesquisa sobre o tema, visando a demonstrar o "estado da arte" em modelagem matemática. Portanto, caracterizou-se os artigos em seis áreas:

- C1 – aplicação da modelagem matemática em diferentes perspectivas (19 teses);
- C2 – aprendizagens no contexto da modelagem matemática (11 teses);

- C3 – mapeamento da utilização da modelagem matemática (três teses);
- C4 – modelagem e conteúdo matemático (sete teses);
- C5 – modelagem matemática e aspectos teóricos, filosóficos e epistemológicos (17 teses); e
- C6 – a formação de professores e a modelagem matemática (15 teses).

Com isso, apura-se que a maior parte dos trabalhos mapeados se encontra na categoria C1, que tem perspectivas como: método de ensino, estratégia de ensino, e aprendizagem e ambiente de aprendizagem. Além disso, esse objeto de estudo é mais recorrente em teses, tendo presença em pesquisas desde o ano de 1992. As categorias C5 e C6 também apresentam parcelas maiores da distribuição, mas são recorrentes nos anos mais recentes, após 2005. Com o enfoque na formação de professores (C6), Tambarussi e Klüber interpretam "que há, portanto, um movimento que se volta de modo mais sistemático sobre as relações entre a modelagem matemática e formação de professores de matemática" (TAMBARUSSI; KLÜBER, 2014, p. 223), influenciando então os cursos de pedagogia.

As principais caracterizações confirmam que um bom conjunto de publicações tem surgido no âmbito da aplicação da modelagem matemática. Cardoso e outros dizem que os resultados em exames oficiais apontam para uma grande defasagem no ensino e aprendizagem em geometria, principalmente em geometria espacial. Assim, "apresentar uma sequência didática utilizando a modelagem matemática como alternativa metodológica, tendo em vista seu potencial para quebrar dicotomia existente entre a matemática escolar e a matemática presente nas mais variadas situações do cotidiano" se torna objeto de pesquisa (CARDOSO et al, 2012, p. 140).

O ensino com base em livros didáticos resulta em práticas únicas, servindo de referência para a preparação e a condução das aulas de professores. Costa e Lima revelam "que a maioria dos livros não indica o uso de recursos didáticos alternativos e tampouco propõe atividades lúdicas para o ensino da geometria" (COSTA; LIMA, 2010 apud CARDOSO et al., 2012, p. 141). Com isso, conjectura-se que o método de ensino da matemática continua sendo o tradicional, o qual desestimula os estudantes ao considerá-la sem importância.

Cardoso e outros (2012) realizaram uma atividade de intervenção com estudantes do 3º ano do ensino médio de duas escolas públicas, com uso de engenharia didática, para avaliar como a modelagem matemática tem implicações no processo de aprendizagem de geometria espacial. Os resultados demonstraram que, apesar de se tratar de estudantes

do ensino médio, grande parte deles não dominava as operações básicas, necessárias para as tarefas propostas pela atividade. Apesar do déficit cognitivo dos estudantes, Cardoso e outros (2012) indicam que os estudantes preferem aulas mais estimulantes e não reconhecem o conteúdo de sala na vida cotidiana. O conhecimento inicial dos estudantes quanto à geometria era bastante precário mas, após a atividade, avaliou-se uma melhora significativa na avaliação quantitativa e, ainda, no interesse dos estudantes. Por fim, considera-se positiva a aplicação da metodologia de ensino, posto que:

> a opção de se trabalhar com a modelagem no ensino da geometria foi essencial para a motivação e a participação efetiva dos estudantes na realização das atividades, o que provocou um avanço na compreensão dos conceitos de geometria plana e espacial, possibilitando o aprendizado significativo de alguns tópicos de geometria espacial métrica (CARDOSO et al., 2012, p. 150).

A modelagem matemática permite atribuir sentido e construir significados em matemática, por induzir relações entre a vida dos estudantes e o aprendizado, favorecendo ainda problemas extraescolares. Almeida e Brito afirmam que

> se os alunos não conseguem 'entrar' na disciplina matemática é porque não conseguem identificar os principais tipos de problemas que lhe dão sua razão de ser, ficando limitados à aquisição de um domínio formal de técnicas, algoritmos ou à utilização de ferramentas computacionais (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 484).

Almeida e Brito procuram "investigar o sentido que os alunos atribuem a atividades de modelagem matemática desenvolvidas durante suas aulas de matemática". A hipótese subjacente proposta pelos autores é a de que a modelagem traz abordagens para questões reais, "oriundas do âmbito de interesse dos alunos", e que pode apoiar e motivar a aquisição e a compreensão de métodos e conteúdos da matemática escolar (ALMEIDA E BRITO, 2005, p. 487). Sendo assim, observa-se que "diversas experiências de modelagem matemática têm sido conduzidas em sala de aula, tanto no Brasil quanto no exterior", fato que permeia a necessidade de tornar visível aos estudantes o papel da matemática fora da sala de aula (ALMEIDA E BRITO, 2005, p. 488).

Avaliando o sentido que os estudantes atribuem a tal didática, Almeida e Brito (2005) planejaram e estruturaram uma proposta de ensino e aprendizagem com duas turmas de estudantes do ensino médio em uma escola pública de Londrina (Paraná). A prática se baseou em três etapas: a) a exploração com os estudantes de uma modelagem matemática já estruturada; b) a sugestão de um tema, o qual os estudantes

pesquisaram e a respeito do qual realizaram a modelagem, sob orientação; e c) os estudantes, organizados em grupo, escolheram um tema e elaboraram um trabalho de modelagem. A coleta de dados ocorreu por observação direta, pelos trabalhos elaborados, pela aplicação de questionários e por entrevistas semiestruturadas. As conclusões permitiram identificar "três condições que podem favorecer a atribuição de sentido e significado numa atividade de modelagem", isto é, a importância subjetiva do problema, o engajamento crítico e a transferência de aprendizagem, e a relevância da matemática em uma modelagem (ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 483).

Por fim, avalia-se que atividades de modelagem matemática induzem relações entre a matemática e a vida dos estudantes. Almeida e Brito concluem que as três condições encontradas, "quando incorporadas nas atividades de sala de aula, podem fazer com que o conhecimento construído nestas atividades seja dinâmico, tenha vida"(ALMEIDA; BRITO, 2005, p. 395). Por isso, o processo de ensino e aprendizagem incorpora uma visão mais ampla.

Discussão, transmissão de conhecimentos e interação em sala de aula

Boa parte dos artigos encontrados nas diversas revistas e periódicos nacionais tem tratado sobre a dificuldade, os meios e os benefícios de determinadas formas de condução do ensino em sala de aula. Fanizzi (2011), Lamonato e Passos (2011) e Silva (2010) procuram investigar e discorrer sobre como a interação e a exploração-investigação no ensino da matemática propiciam a transferência e, principalmente, a construção do conhecimento dos estudantes. A interação de educadores e estudantes não é favorável apenas ao avanço cognitivo dos estudantes, mas também ao desenvolvimento social destes, sendo igualmente benéfica para o sistema educacional.

Acerca da explicação de como a inteligência humana se desenvolve, existem três grandes correntes teóricas. Duas delas, a *empirista* e a *racionalista*, diferem da seguinte forma:

> enquanto que para os empiristas o conhecimento tem como fonte principal a experiência adquirida em função do meio físico, sempre mediada pelos sentidos, para os racionalistas o conhecimento parte do sujeito, podendo ser produzido por ele isoladamente do mundo (SILVA, 2010, p. 49).

A terceira corrente se contrapõe às teorias empiristas e racionalistas. Silva explana que, para o *construtivismo*, a "fonte do conhecimento é o sujeito reflexivo, o qual age com o meio a partir de abstrações reflexivas, realizadas mediante a construção de relações

entre objetos, ações ou mesmo entre ideias já construídas" (SILVA, 2010, p. 49). Desse modo, revela-se uma visão diferenciada sobre o conhecimento, no qual:

> considerando que o conhecimento não se transmite, se constrói, o conhecimento não pode ser despejado. É necessário, oportunizar, de fato, a sua construção, somando em vez de sintetizar. Com isso, o aluno não deve ser visto como uma testemunha, que contempla a solução sem dúvidas e obstáculos, e sim como protagonista no processo de conhecimento, podendo construir seu próprio conhecimento (SILVA, 2010, p. 51).

Métodos e estratégias que auxiliam na construção do conhecimento são de grande valia para o sistema educacional. Assim, percebe-se que há algum tempo a resolução de problemas já ocupa um lugar de destaque nos temas da educação matemática. Lamonato e Passos explanam que, em inúmeras pesquisas, a exploração-investigação matemática "é veiculada como objetivo de ensino e aprendizagem nos cursos superiores e na educação básica, e também é um dos principais objetivos dos professores que ensinam matemática, conforme recomendam diversos documentos curriculares" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 52).

A discussão concebida por Lamonato e Passos coloca em vista a "possibilidade de construção de conhecimentos, incluindo tanto aqueles específicos de matemática quanto as atitudes perante esta ciência e as novas relações entre quem aprende e o objeto de conhecimento a ser aprendido" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 52). Dessa forma, a resolução de problemas é vista como impactante no avanço do saber.

A exploração-investigação "possibilita ao aluno pensar a partir de uma dinâmica que prevê observações, descobertas, erros, acertos e, fundamentalmente, decisões" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 53). Assim, a superação de incertezas, o questionamento e a busca das respostas são fatores cruciais no decurso do processo de ensino e aprendizagem, sendo que "um dos aspectos relevantes no processo de inquirição e exploração-investigação na sala de aula são as contribuições para as crenças, as concepções e as posturas dos alunos em relação à matemática" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 55). Com isso, colocar o estudante em uma posição de desvendar, buscando evidências, regularidades e semelhanças, contribui para a motivação em relação à matemática.

Por fim, avalia-se que a exploração-investigação matemática "permite a vivência do processo, e não apenas objetiva o resultado final; é, desse modo, um caminho promissor para o aluno 'pensar sobre' o que se investiga, esperando-se que ele não apenas desenvolva o que foi determinado pelo professor" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 64). Tal método valoriza não apenas a solução, mas também as diferentes

formas e estratégias de resolver as atividades. Nessa forma de ensino, "o professor deixa de assumir a postura centralizadora, ou seja, a responsabilidade pela nova aprendizagem passa a ser compartilhada entre professor e alunos" (LAMONATO; PASSOS, 2011, p. 69).

Fanizzi descreve que é "a partir da comunicação e da interação – presença de dois ou mais interlocutores por meio dos quais é possível dar continuidade e desenvolver um ato de comunicação – que os indivíduos se relacionam com o ambiente social que os cerca, construindo significados para o mundo" (FANIZZI, 2012, p. 318). Dessa forma, é de suma importância compreender em que medida a construção do conhecimento pode ser definida a partir dos processos interativos.

Considerando o exposto por Lamonato e Passos (2011) e Silva (2010), avalia-se que o professor pode provocar um impacto tanto positivo quanto negativo em relação à sua didática utilizada em sala de aula. Assim, considera-se que:

> o professor necessita de clareza para definir seu papel de interlocutor na sala de aula. Compreender o tempo adequado de exposição sobre um tema, mensurar sua fala no diálogo direto com um ou mais alunos, optar por não fazer intervenções em determinadas situações de interação entre os alunos, são procedimentos que o professor deveria incorporar em suas reflexões e, consequentemente, em sua prática. Com isso, o professor teria mais condições de identificar, em sua classe, as situações que desencadeiam a construção de conhecimento, os temas de natureza sociocultural dos alunos, a necessidade afetiva da comunicação, dentre vários outros aspectos presentes no ato de aprender (FANIZZI, 2012, p. 324).

Promover a participação ativa dos estudantes no processo de ensino e aprendizagem das aulas de matemática pode ser um importante meio para estimulá-los a ser autônomos e criativos na construção do conhecimento. Utilizar formas didáticas que aprimorem a motivação e o conceito dos estudantes quanto ao ensino da matemática e desenvolver métodos de ensino que engendrem uma maior interação com os estudantes, são ações que provocam uma ampliação do processo cognitivo e social dos estudantes, considerando o panorama do desempenho educacional brasileiro.

Motivação, autoconceito e a matemática

Ambientes de sala de aula em que os indivíduos tenham maiores motivações, afetuosidade, afiliação e concentração, entre tantos outros fatores psicoemocionais,

colaboram para o aprendizado dos estudantes. Estar motivado e interessado em relação ao aprendizado, bem como reconhecer e confiar na capacidade individual de compreender conteúdos novos, são ações que impactam significativamente nos níveis de instrução dos estudantes.

Em vista disso, Paiva e Lourenço (2011) buscam avaliar, por meio de modelos de equações estruturais, se o autoconceito dos estudantes e o ambiente de sala de aula são relevantes para a explicação do rendimento acadêmico. Colocando-se em pauta um dos principais problemas educacionais brasileiros, isto é, a questão do fracasso e do correspondente abandono escolar, revela-se que o tema do autoconceito do estudante procura inseri-lo em uma órbita de agente do seu aprendizado, bem como do fornecimento de informações concernentes às suas principais dificuldades.

O conhecimento pessoal e a tradução disso em dificuldades no ensino também são frutos de variáveis afetivo-motivacionais, o que coloca para a educação um novo método de se avaliar e elaborar metodologias de ensino. O estudante se torna mais propício ao aprendizado, pois explicita suas dúvidas no ambiente escolar. Torna-se evidente que:

> As relações interpessoais proporcionam experiências conjuntas e, para que todos os intervenientes possam ser beneficiados no âmbito motivacional, é essencial que se facultem espaços em que cada um possa participar de uma forma ativa, apresentando os seus saberes individuais a favor do grupo e que estejam receptivos a tudo aquilo que os outros lhe possam oferecer, nomeadamente a troca de conhecimentos e sentimentos (PAIVA; LOURENÇO, 2011, p. 395).

As evidências reforçam a persistente e significativa relação entre as variáveis *autoconceito* e *ambiente escolar*, e demonstram ainda que sujeitos com baixo autoconceito podem ter dificuldades em matemática não por uma falta de inteligência, mas por acreditarem que são incapazes de aprender ou fazer as coisas. Muitas vezes, a origem dessa autoavaliação negativa está relacionada ao *feedback* que eles recebem no ambiente escolar, seja dos professores ou dos colegas de classe, bem como de outras origens – familiares ou comunitárias (PAIVA; LOURENÇO, 2011).

Programas que busquem desenvolver e melhorar o autoconceito, seja pelos pais ou pelos professores, podem potencializar os níveis de aprendizado, bem como ocasionar a inclusão dos estudantes em novas motivações e expectativas acerca de si mesmos. O ensino da matemática tem muito a se beneficiar com mudanças nesse sentido.

Conclusão

As discussões sobre a didática, o ensino e as experiências na educação matemática demonstram uma trajetória longa e ampla. Os assuntos são bastante diversos, abrangendo métodos considerados novos e também aqueles que devem ser reforçados nas práticas educacionais. Os mapeamentos produzidos por INEP (1997), Fuchs (2012), Rosa e outros (2012), Biembengut (2009) e no "Mapeamento da educação matemática no Brasil" (mimeo) demonstraram exatamente a amplitude dos temas, embora com artigos concentrados principalmente nos temas de didática e ensino da matemática.

Dessa forma, a seleção de artigos exposta neste trabalho exibe produções acerca do uso de jogos e manipuláveis, assim como a importância da interação de estudantes e professores é evidente nas publicações nacionais.

Transformar o ensino da matemática em algo prazeroso e motivador aos estudantes proporciona um aprendizado mais concreto e duradouro. As expectativas individuais e a compreensão da utilidade da matemática para o cotidiano e o âmbito profissional e social reforçam o autoconceito e a perspectiva de melhora da qualidade de vida. A desconstrução do conceito de que "a matemática não é para mim" ou de que "não sou capaz de aprender matemática" advém das práticas utilizadas em sala de aula. Com isso, projetar e estimular didáticas interativas e satisfatórias são ações que têm apenas a beneficiar o aprendizado matemático.

Quando são observadas as disparidades entre o conhecimento dos estudantes brasileiros e dos países desenvolvidos, como nos testes do PISA, torna-se incontestável o longo percurso que ainda se tem a trilhar. As dificuldades da população brasileira quanto à matemática repercutem em praticamente todas áreas que envolvem a vida humana. Elas têm reflexos sobre a baixa capacidade produtiva brasileira, a educação financeira da população, as necessidades de saberes para a compreensão do que está ao redor das pessoas, entre tantos outros aspectos.

Mudar, adquirir, colher e integrar metodologias de ensino à educação matemática são ações de grande importância. Com isso, ampliam-se os impactos do sistema educacional nas pessoas, promovendo a qualidade de vida individual e social – ao propiciar mudanças na órbita da saúde, das finanças pessoais, da seguridade e da sociedade civil e democrática. Os artigos tratados neste trabalho buscam demonstrar a importância

de se ter um ensino que afete e modifique as expectativas em relação à matemática. Assim, trabalhar de forma lúdica, interativa e incentivadora os conceitos matemáticos em sala de aula é uma evidência concreta para a construção do conhecimento.

Bibliografia

ABRÃO, Ruhena Kelber; SILVA, João Alberto da. A análise do uso dos jogos para o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático nos anos iniciais do ensino fundamental. *Revemat*. Florianópolis, v. 6, n. 2, p. 67-80, 2011.

ALMEIDA, Lourdes Maria Werle de; BRITO, Dirceu dos Santos. Atividades de modelagem matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? *Ciência & Educação*. Bauru, v. 1, n. 3, p. 483-498, set./dez. 2005.

BIEMBENGUT, Maria Salett. 30 anos de modelagem matemática na educação brasileira: das propostas primeiras às propostas atuais. *Alexandria: Revista de Educação em Ciência e Tecnologia.* Florianópolis, v. 2, p. 7-32, jul. 2009.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Explorando o ensino da matemática*: artigos, v.1. Brasília, 2004.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Proposta curricular para a educação de jovens e adultos*: segundo segmento do ensino fundamental (5ª a 8ª série); matemática, v. 3. Brasília, 2002.

CARDOSO, Andrea et al. Ensino de geometria espacial métrica: uma experiência com modelagem. *Sigmae.* Alfenas, v. 1, n. 1, p. 140-151, 2012.

CONTI, Keli Cristina; VASCONCELOS, Renan de Matos. Elaborando jogos com alunos do 8.º ano do ensino fundamental e aprendendo matemática. *Revemat*. Florianópolis, v. 8, n. 1, p. 301-315, 2013.

FANIZZI, Sueli. A importância da interação nas aulas de matemática: da elaboração oral à construção de conhecimentos. *Educação Matemática Pesquisa.* São Paulo, v. 14, n. 2, p. 317-336, 2012.

FUCHS, M. J. *Revistas na área da educação e educação matemática*: espaços para socialização-discussão-aprendizado; material instrucional. Jan. 2012. Disponível em: <http://cursos.unipampa.edu.br/>. Acesso em: 26 jun. 2014.

GOMES, Maria Laura Magalhães. *História do Ensino da Matemática*: uma introdução. Belo Horizonte: CAED-UFMG, 2012.

INSTITUTO NACIONAL DE ESTUDOS E PESQUISAS EDUCACIONAIS. *Mapeamento de educação matemática no Brasil, 1995*: pesquisas, estudos, trabalhos técnicos-científicos por subárea temática. 2.ed. Brasília: INEP, 1997.

LAMONATO, Maiza; PASSOS, Carmen Lucia Brancaglion. Discutindo resolução de problemas e exploração-investigação matemática: reflexões para o ensino de matemática. *Zetetiké*. Campinas, v. 19, n. 36, p.51-74, jul./dez. 2011.

PAIVA, Maria Olímpia Almeida de; LOURENÇO, Abílio Afonso. Rendimento acadêmico: influência do autoconceito e do ambiente de sala de aula. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*. Brasília, v. 27, n. 4, p. 393-402, out./dez. 2011.

ROSA, Josélia Euzébio da et al. Tendências de investigação presentes no grupo de trabalho de educação matemática da Associação Nacional de Pós-Graduação e Pesquisas em Educação (ANPED) no ano de 2012. *Criar Educação: Revista do Programa de Pós-Graduação em Educação – UNESC*. Criciúma, v. 1, 2012.

SILVA, Georgiane Amorim. Construir ou transmitir conhecimento nas aulas de matemática? *Rematec.* Natal, v. 7, p. 49-53, jul./dez. 2010.

TAMBARUSSI, Carla Melli; KLÜBER, Tiago Emanuel. Focos da pesquisa stricto sensu em modelagem matemática na educação matemática brasileira: considerações e reflexões. *Educação Matemática Pesquisa.* São Paulo, v. 16, n. 1, p. 209-225, 2014.

Determinantes do aprendizado em matemática dos estudantes do 5º ano no período de 2007 a 2013

Eduardo Tillmann

Introdução

O objetivo deste estudo é conhecer os fatores relacionados à escola, a professores e estudantes que têm efeito sobre o desempenho dos estudantes no 5º ano do ensino fundamental da rede pública, na disciplina de matemática. O artigo segue a tradição dos trabalhos na área, conforme iniciado pelo Relatório Coleman (COLEMAN et al., 1966), um trabalho seminal que consistiu em uma tentativa de mensurar os efeitos dos recursos utilizados nas escolas para produzir aprendizagem sobre o desempenho escolar dos estudantes norte-americanos.

A literatura nacional nesta área, como Biondi e Felício (2007), Albernaz e outros (2002) e Franco e Menezes-Filho (2008), entende que os atributos dos estudantes e de seus familiares são relevantes para explicar o desempenho escolar, enquanto variáveis da escola, dos professores e do diretor permanecem em segundo plano. A contribuição do presente trabalho consiste em incluir variáveis de incentivo por parte dos pais, assim como outras variáveis da escola, como ambiente das salas de aula, segurança e atividades pedagógicas realizadas pelos professores nas aulas.

O trabalho faz uso da metodologia de *dados em painel*, o que possibilita o controle por efeitos específicos não observados das escolas, isto é, pela *endogeneidade*, sendo que este também é um avanço frente a outros modelos encontrados na literatura.

Entre os resultados de maior destaque, está o incentivo dos pais como o principal contribuinte para aumentar o desempenho dos estudantes em matemática, além do fato de ter cursado a pré-escola. Por outro lado, o artigo enfatiza o atraso escolar e, também, a necessidade de se ter uma ocupação no mercado de trabalho e realizar trabalho doméstico por mais de uma hora diária como prejudiciais ao desempenho escolar.

Além desta introdução, o presente trabalho está dividido em cinco subseções. A segunda trata da revisão de literatura, na qual é exposta brevemente a base teórica por meio

da qual o restante do trabalho se desenvolve. Em seguida, é apresentada a evolução do desempenho escolar no Brasil, nos anos de 2007 a 2013. Na quarta subsecção, são apresentadas a metodologia e a descrição das variáveis utilizadas. Na quinta, são apresentados os resultados encontrados para, em seguida, serem apresentadas as considerações finais.

Referencial teórico

Existe uma extensa literatura que trata da importância da educação. Na área do crescimento econômico, alguns dos principais estudos são os de Romer (1986) e Lucas (1988), que entendem que o aumento da renda *per capita* é explicado por meio da eliminação dos retornos marginais decrescentes ao capital. A forma pela qual isso se torna possível, segundo esses modelos, ocorre por meio da acumulação de capital humano, que se dá por meio da educação e do *learning by doing* ("aprender fazendo"), destacando o papel das ideias e da tecnologia no crescimento econômico.

A decisão de acumular capital humano, por sua vez, é entendida como uma ponderação entre custos e benefícios, que é determinada pela taxa de retorno que esse tipo de investimento apresenta, conforme determinado pelo salário que se pode obter no mercado de trabalho. Isto é, ela ocorre de forma análoga à decisão de investimento em capital de uma determinada empresa.

No caso específico do presente trabalho, é importante notar que existe um alto custo de oportunidade envolvido nessa decisão, que atinge principalmente as famílias de maior vulnerabilidade. Isso ocorre porque as crianças e os jovens, além de potenciais geradores de renda no presente, têm a capacidade de acumular capital humano para o futuro (BASU; VAN, 1998; PNUD, 2009). Especialmente para os países em desenvolvimento, como o Brasil, a baixa qualidade da educação é um dos fatores que favorece o ingresso no mercado de trabalho (GONZAGA et al., 2012).

A educação é, também, considerada como um dos pilares da ideia de *desenvolvimento humano*. Esse papel multidimensional é enfatizado pela *abordagem das capacitações*. Um de seus principais porta-vozes Sen (1999), considera tanto o papel de propulsor econômico, como o valor instrumental do ensino. Segundo ele, é por meio da educação e do aprendizado que as pessoas podem se tornar mais produtivas no tempo, contribuindo para o processo de expansão econômica e, ainda, servindo como instrumento na promoção das liberdades. Isso é fundamental para o entendimento da

ideia de *bem-estar*, pois proporciona aos indivíduos a possibilidade de eles se engajarem em atividades que determinem o que a sociedade valoriza.

A ideia, então, é que uma pessoa com um nível básico de escolaridade é capaz de se articular melhor na busca do que a teoria entende como a "vida que as pessoas têm motivo para dar valor" e, portanto, ela é importante não somente em termos de quantidade, mas principalmente em termos de qualidade, uma que se refere ao que as pessoas conseguem ser e fazer (WATTS et. al, 2008).

Dessa forma, de acordo com Saito (2003), a educação pode ser encarada como um processo de empoderamento, uma vez que permite, além da expansão das capacidades e das oportunidades, o desenvolvimento do julgamento em relação ao uso apropriado das capacitações.

Essa ênfase atribuída à expansão das capacidades e das oportunidades, assim como o papel da escolaridade na abordagem do capital humano, ganham uma nova dimensão com os trabalhos realizados por James Heckman. Investigando os fatores que levam ao aumento da desigualdade de salários nos Estados Unidos, Heckman, Lochner e Taber (1998) adicionam à literatura a importante característica da formação do capital humano de se *complementar no tempo*, isto é, que as habilidades geram mais habilidades. Segundo esses autores, a formação das habilidades é realizada por um processo dinâmico com elementos fortemente sinergéticos, de modo que investimentos realizados durante a infância das pessoas são capazes de promover ainda mais investimentos no futuro.

A abordagem de Heckman promove ainda a distinção entre as habilidades *cognitivas* e a *não cognitivas*, constituindo uma ampliação da visão tradicional do capital humano, na qual a habilidade é encarada como uma medida cognitiva inata, escalar e invariável com a idade (CUNHA et al., 2006). Por meio dessa diferenciação, é possível identificar que, além das habilidades cognitivas, as não cognitivas – como perseverança, motivação, preferência temporal, aversão ao risco, autoestima, autocontrole e preferência por lazer – também se revelam importantes na determinação de salários e escolaridade, bem como em questões como gravidez na adolescência, propensão a fumar, crime e, inclusive, a performance em testes de desempenho, entre outros aspectos da vida social e econômica (HECKMAN et al., 2006; BASSI et al., 2012; HECKMAN; KAUTZ, 2012).

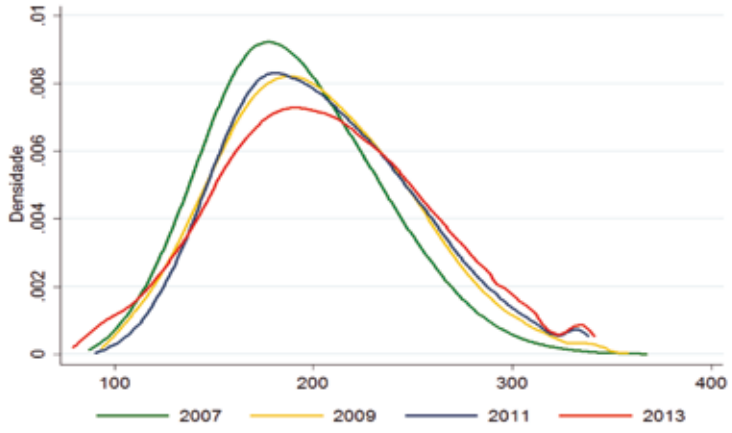
Além disso, Heckman (2000) torna evidente a importância da sinergia entre os diferentes tipos de habilidade, por meio do que ele convenciona chamar de *complementaridade dinâmica* e *autoprodutividade*. Isto é, a característica inerente às habilidades que,

se obtidas em um determinado estágio, aumentam o retorno de investimentos posteriores, e o fato de que elas se autorreforçam e permitem o alcance de uma maior gama de capacitações em períodos posteriores. Essas características constituem um efeito multiplicador, por meio do qual as habilidades são capazes de se autorreproduzir, gerando novas habilidades.

Evolução do desempenho dos estudantes no Brasil

Nesta seção, será apresentada a evolução do desempenho em matemática dos estudantes do 5º ano da rede pública no Brasil. A ideia é avaliar como o desempenho dos estudantes variou no período analisado, isto é, entre 2007 e 2013.

Figura 1. Função de probabilidade das notas em matemática do 5º ano (2007-2013)



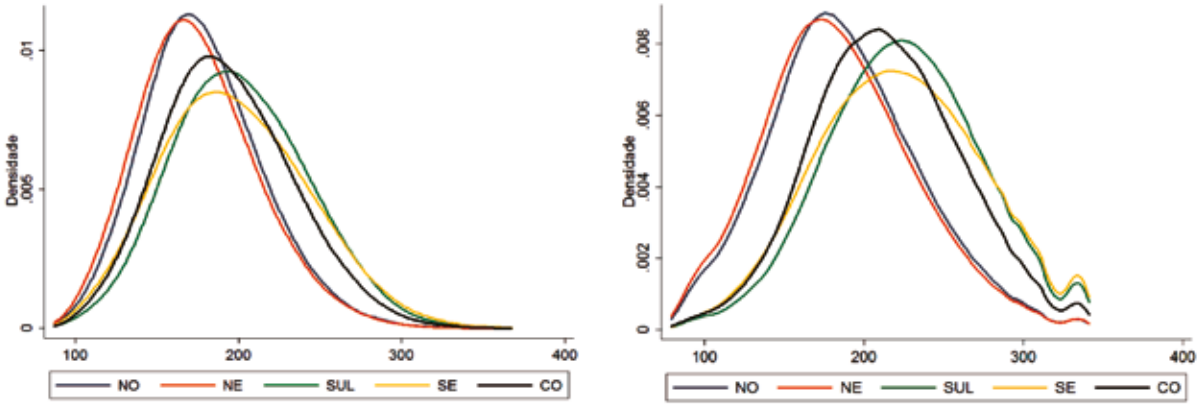
A Figura 1 mostra a evolução do desempenho dos estudantes em matemática nas escolas públicas, excluindo-se as federais. De maneira geral, observa-se que ocorre uma tímida melhora nas médias das notas com o passar dos anos, o que é enfatizado pelo deslocamento para a direita das curvas de densidade. Note-se também que, com o passar dos anos, há uma menor concentração em torno da média, isto é, as densidades são cada vez mais baixas. Essas afirmações são corroboradas pela Tabela 1, a seguir, onde são mostrados o aumento da média e do desvio padrão das distribuições.

Tabela 1. Estatística descritiva do desempenho em matemática do 5º ano (2007-2013)

Ano	Média	Desvio padrão	Mínimo	Máximo	Nº observações
2007	191,11	43,29	86,98	367,54	2.289.558
2009	201,66	47,00	93,34	358,31	2.535.179
2011	204,55	47,19	90,13	338,18	2.718.703
2013	205,05	52,25	78,92	341,25	2.442.020

Essa melhora do desempenho dos estudantes brasileiros ocorre de forma desigual entre as regiões do país, conforme pode ser observado na Figura 2. No ano de 2007, as médias entre as regiões eram relativamente mais próximas, quando comparadas com 2013. Em 2007, as distribuições referentes às Regiões Nordeste e Norte são as que apresentaram menor média de notas, 175,26 e 178,44 respectivamente, assim como o menor desvio padrão: 36,67 na Região Norte, e 37,15 no Nordeste. A maior média foi a da Região Sul, 201,22, com um desvio padrão de 42,01, seguida pelo Sudeste, com 197,97 de média e desvio de 45,37, e pelo Centro-Oeste, com média de 193,09 e desvio de 40,76.

Figura 2. Função de probabilidade das notas em matemática do 5º ano, separada pelas regiões do Brasil em 2007 e 2013



a) Função de densidade das notas de matemática, por região do Brasil em 2007

b) Função de densidade das notas de matemática, por região do Brasil em 2013

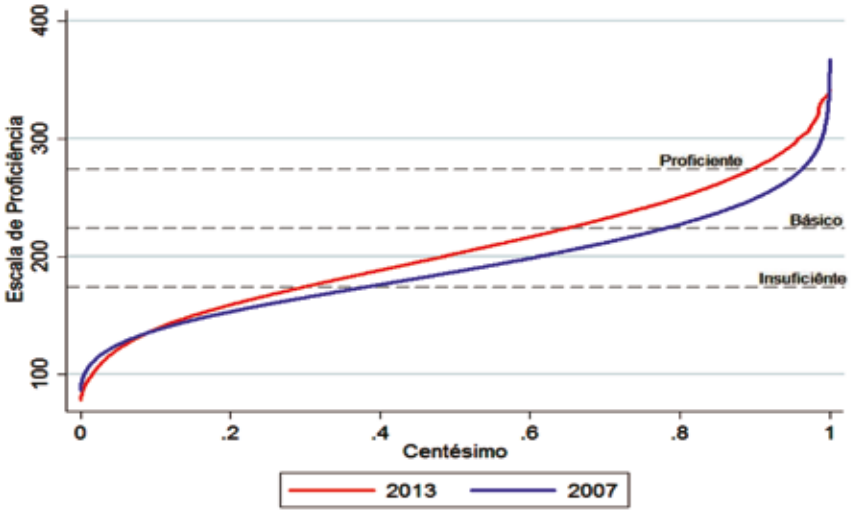
Em 2013, a maior média permaneceu com a Região Sul, 223,34, com desvio padrão de 48,42, seguida por: Sudeste, como média 221,11 e desvio 51,38; Centro-Oeste, com média 213,33 e desvio 47,03; Norte, com média 185,72 e desvio 46,86; e Nordeste, com média 182,39 e desvio 47,21. Traçando um comparativo entre os anos, em 2007, o Nordeste e o Norte apresentavam, respectivamente, 87% e 88,7% da nota da Região Sul, percentual que caiu para 81,66% e 83,15% no ano de 2013, o que ilustra o aumento da desigualdade em termos de desempenho.

Mesmo com esse aumento da desigualdade entre as regiões, é importante destacar que ocorreu um aumento da média em todas as regiões estudadas, bem como um aumento da variância das notas de cada distribuição. Isso é ilustrado pelo deslocamento para a

direita das curvas e pela menor concentração em torno da média das distribuições, ou seja, elas diminuíram de altura.

Para melhor identificar a melhora do desempenho, traçou-se a distribuição acumulada do desempenho em matemática dos anos 2007 e 2013. Dessa forma, torna-se evidente a melhora no decorrer do tempo. Em 2007, excluindo-se os 10% mais baixos das piores notas, há uma dominância da distribuição acumulada de 2013, isto é, 2013 apresenta resultados superiores.

Figura 3. Distribuição acumulada da proficiência em matemática dos estudantes do 5º ano do ensino fundamental em 2007 e 2013



Nota-se que, em 2007, os quase 40% dos estudantes que realizaram a prova obtiveram nota insuficiente em relação ao conhecimento esperado da série em questão, enquanto que pouco menos de 4% obtiveram o conceito de *proficiente*, isto é, adequado à série que cursam. Por outro lado, em 2013, o percentual de estudantes cujo aprendizado é insuficiente passou para cerca de 30%, enquanto que 10% deles obtiveram o conceito de *proficiente*. No entanto, em ambos os períodos, a mediana das notas ficou em 187,48 (2007) e 202,62 (2013), isto é, o estudante mediano do 5º ano se encontrava entre o nível básico (225) e o insuficiente (175), o que demostra o baixo domínio do conteúdo de matemática das crianças brasileiras. Portanto, isso justifica o objetivo do presente trabalho de buscar compreender que as variáveis dos contextos familiar e escolar influenciam o desempenho dos estudantes.

Método

O presente trabalho procura investigar o quanto certas características observáveis de estudantes, escolas, diretores e professores podem contribuir para o aprendizado dos estudantes do 5º ano das escolas públicas no Brasil. A base de dados utilizada para tal tarefa

é a do Sistema de Avaliação da Educação Básica (SAEB), que tem como principal objetivo avaliar a educação básica brasileira e contribuir para a melhora de sua qualidade, por meio do fornecimento de subsídios voltados à assistência na formulação e na criação de políticas públicas. O SAEB, por sua vez, é composto por dois processos: a Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB) e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc). A ANEB, que recebe o nome de SAEB em suas divulgações, é realizada por amostragem nas redes de ensino e abrange estudantes das redes públicas e privadas do país, matriculados na 4ª série (5º ano) e na 8ª série (9º ano) do ensino fundamental, e no 3º ano do ensino médio. Por outro lado, a Anresc, também conhecida como Prova Brasil, consiste em uma avaliação censitária que envolve os estudantes da 4ª série (5º ano) e da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental das escolas públicas das redes municipais, estaduais e federal (INEP, 2016).

O escopo deste artigo são as escolas municipais e estaduais avaliadas pelo SAEB e, portanto, faz-se uso das avaliações da Prova Brasil de 2007 e 2009, bem como do SAEB de 2011 e 2013. A estratégia metodológica é a de *dados em painel*, que explora como unidade básica as 2.840 escolas que se repetiram nos anos em que o SAEB foi realizado, de acordo com a seguinte equação:

$$Y_{ijt} = P_{ijt}\beta_1 + F_{ijt}\beta_2 + A_{ijt}\beta_3 + At_{ijt}\beta_4 + Pr_{ijt}\beta_5 + D_{ijt}\beta_6 + E_{ijt}\beta_6 + c_j + u_{ijt} \quad (1)$$

Onde *Y* é a média da nota dos estudantes *i* na escola *j* no tempo *t*; *P* é a média das características pessoais dos mesmos estudantes *i* na escola *j* no tempo *t*; e, analogamente, *F*, *A*, *At*, *Pr*, *D* e *E* são, respectivamente, a média das características familiares, do ambiente em que os estudantes estão inseridos, das atividades que exercem, dos professores, diretores e da escola *j* dos estudantes *i* no tempo *t*. Por fim, c_j é o efeito específico não observado da escola, e *u* é o erro idiossincrático.

Essa metodologia, conforme destacado por c_j, é um avanço em relação a outros métodos, por permitir o controle por efeitos específicos não observados das escolas. Esses efeitos, por sua vez, levam à implementação do método de efeitos fixos e de efeitos aleatórios, dependendo da correlação entre as variáveis explicativas e a constante c_j, o que pode ser verificado pelo teste de Hausman.

Descrição das variáveis

As variáveis utilizadas podem ser separadas em sete subcategorias: as *características pessoais*, que correspondem ao sexo, à cor e à idade; as *características familiares*, que

são a presença da mãe, a presença do pai e o máximo da escolaridade dos pais; as *variáveis de atividades*, que são se o estudantes trabalha, desempenha mais de uma hora diária de trabalho doméstico e se iniciou os estudos na pré-escola; as *características do ambiente* são o incentivo por parte dos pais e o nível socioeconômico; as *características pedagógicas e do professor*, como sexo, outra atividade, experiência e tipo de contrato de trabalho, além das variáveis indicativas de ter livro didático, se esse livro foi fornecido no início do ano letivo e a realização de tarefas pedagógicas por parte do professor; as *variáveis do diretor* dizem respeito a se este tem ensino superior, pós-graduação, experiência e a forma pela qual assumiu a direção da escola; por fim, as *variáveis da escola*, como conselho escolar, se tem aulas de reforço, a administração e o ambiente escolar, as condição das salas e a segurança.

Cabe aqui uma explicação: as variáveis de incentivo dos pais, nível socioeconômico, tarefas pedagógicas realizadas pelos professores, ambiente escolar, condições das salas de aula e segurança na escola, na realidade, são índices criados a partir da técnica de *análise de componentes principais* e, portanto, agregam diversas perguntas existentes no questionário aplicado no SAEB. A variável de incentivo dos pais abrange o fato de se os pais cobram tarefas dos filhos estudantes, se comparecem às reuniões de pais na escola, se cobram a presença dos filhos na escola, se incentivam a leitura e o estudo, além de se conversam com eles sobre o dia na escola.

Ademais, a variável que indica a condição socioeconômica é a agregação das perguntas sobre posse de televisão, geladeira, máquina de lavar roupa, carro e computador, se a família tem empregada doméstica trabalhando em casa, além do número de banheiros e quartos da casa. A variável de tarefas pedagógicas se refere a atividades que o professor desenvolve em aula, tais como se realiza exercícios para automatizar procedimentos, se discute as soluções, se grava regras para obter as respostas, se aborda temas de jornais e revistas, se experimenta diferentes modos de resolver problemas ou de efetuar cálculos, e se experimenta diferentes ações para resolver problemas.

A variável ambiente escolar se referem às perguntas referentes às condições de telhado, paredes, pisos, portas, janelas, banheiro, cozinha, instalações hidráulicas e elétricas da escola. As características da sala dizem respeito às condições de iluminação das salas, se elas são arejadas e se são limpas. Por fim, as variáveis de segurança englobam 15 características de segurança das escolas.

Resultado e discussão

A estimação da equação (1), apresentada acima, por efeitos fixos por meio do painel de escolas é apresentada na Tabela 2. As estimações por efeitos aleatórios não são reportadas, uma vez que o teste de Hausman levou à rejeição da hipótese de que esse seria o modelo mais adequado.

Tabela 2. Resultado da estimação por efeitos fixos no painel de escolas (2007-2013)

Variável	Estimação	Variável	Estimação
Sexo	0,003 (0,015)	Prof. outra ativ.	0,004 (0,004)
Branco	-0,01 (0,015)	Prof. exper.	0,003 (0,004)
Idade 9	-0,083* (0,050)	Prof. contrato	0,003 (0,005)
Idade 11	0,008 (0,013)	Livro	0,005 (0,005)
Idade 12	-0,074*** (0,023)	Livro início	0,015** (0,007)
Idade 13	-0,101*** (0,027)	Tarefas prof.	0,013 (0,021)
Presença mãe	-0,017 (0,032)	Dir. ens. sup	0,008 (0,011)
Presença pai	0,014 (0,023)	Dir. pós	0,001 (0,005)
Esc. max sup.	0,006 (0,027)	Dir. exper.	0,005 (0,006)
Esc. max med.	0,058** (0,027)	Direção	0,002 (0,005)
Esc. max fund.	-0,008 (0,026)	Conselho	-0,004 (0,007)
Esc. max quart.	0,016 (0,025)	Reforço	0,004 (0,007)
Trab. dom.	-0,041*** (0,014)	Adm. escolar	-0,001 (0,007)
Trabalha	-0,089*** (0,018)	Ambiente	0,010 (0,010)
Pré-escola	0,024* (0,014)	Cond. das salas	0,001 (0,009)
Incentivo	0,150** (0,062)	Segurança	0,016 (0,010)
Socioeconômico	0,043 (0,055)	D 2009	0,064*** (0,007)

Prof. sexo	-0,007 (0,006)	D 2011	0,071*** (0,006)
Prof. ens. sup.	-0,001 (0,006)	D 2013	0,084*** (0,009)
Prof. pós	-0,004 (0,004)	Constante	5,087*** (0,083)
Observações	2.840	Grupos	710
R2 *within*	0,33	R2 *between*	0,55
R2 total	0,38		
Hausman	387,59	P-valor	0,000

Erros padrões ajustados pelos *clusters* de escolas entre parênteses.

* p < 0,10; ** p < 0,05; *** p < 0,01

Na Tabela 2, é possível observar que, entre as variáveis de características dos estudantes, apenas as variáveis de idade são significativas. A idade para o 5º ano escolar é de 10 anos e, dessa forma, os coeficientes de idade devem ser interpretados em relação a essa idade ideal. No caso, escolas com um maior número de estudantes com 9, 12 ou 13 anos mostram um desempenho mais baixo em matemática. Especialmente as idades mais avançadas são um indicativo de que o atraso escolar é prejudicial para a proficiência atual (MENEZES-FILHO, 2007).

Entre as características de escolaridade dos pais dos estudantes, apenas a variável que indica que a escolaridade máxima é o ensino médio completo apresenta significância estatística. A escolaridade dos pais é amplamente difundida na literatura como um dos principais determinantes do desempenho escolar dos estudantes (BIONDI; FELÍCIO, 2007; ALBERNAZ et al., 2002; FRANCO; MENEZES-FILHO, 2008). Uma justificativa para a presente falta de significância estatística está na variável de incentivo dos pais, que pode estar demonstrando justamente a transmissão do valor da educação. Isto é, segundo Courseuil e outros (2001), pais mais educados tendem a ter mais informações sobre a importância da educação e atribuem maior valor ao estudo dos filhos, de tal maneira que essa transmissão de valores pode estar ocorrendo justamente por meio do incentivo ao estudo.

Apesar de essa hipótese requerer mais testes, é importante ressaltar que ela não refuta os resultados encontrados na literatura, apenas os refina. Além do mais, essa interpretação é coerente com a ideia de *complementaridade dinâmica das habilidades*, conforme definida por James Heckman, segundo a qual uma habilidade não cognitiva pode implicar o desenvolvimento de habilidades cognitivas.

As outras variáveis que contribuem para uma melhor nota na prova de matemática é o estudante ter cursado a pré-escola e ter livro didático já no início do ano letivo. O efeito positivo da pré-escola sobre o desempenho é altamente documentado na literatura (FELÍCIO; VASCONCELLOS, 2007; BARBOSA-FILHO; PESSOA, 2006) e indica o alto benefício de se realizar investimentos nessa área. Isso está intimamente relacionado com as ideias de Heckman, uma vez que, quanto mais jovem se adquire certas habilidades, maiores são a sinergia e o efeito multiplicador, por meio do qual a habilidade é capaz de se autorreproduzir, gerando novas habilidades.

Por outro lado, entre as variáveis de atividades, percebe-se que trabalhar – tanto no sentido de ter uma ocupação ou no de desempenhar atividades domésticas por mais de uma hora por dia – reduz o desempenho em matemática. A necessidade de trabalhar é um dos fatores mais documentos na literatura nacional como inibidor do desempenho escolar (FRANCO; MENEZES-FILHO, 2009; ANDRADE, LAROS, 2007).

As variáveis das características de professores, diretores e escolas não apresentam significância estatística, o que é coerente com o encontrado pelo Relatório Coleman (COLEMAN et al., 1966) e, também, com estudos nacionais como o de Franco e Menezes-Filho (2009). Da mesma forma, é importante salientar que as variáveis que indicam características da escola, como o ambiente escolar, as condições das salas e a segurança, apesar de terem o sinal esperado, também não apresentam significância estatística. O mesmo ocorre com o coeficiente de *tarefas prof.*, que indica a adoção de métodos pedagógicos por parte dos professores.

Considerações finais

O presente trabalho teve como objetivo investigar o quanto certas características observáveis de estudantes, escolas, diretores e professores podem contribuir para o aprendizado dos estudantes no 5º ano das escolas públicas no Brasil.

Dessa forma, destaca-se o *incentivo dos pais* como o principal fator contribuinte, no sentido de aumentar o desempenho dos estudantes em matemática. Esse resultado está intimamente relacionado à abordagem de Heckman, uma vez que demonstra uma interação das habilidades não cognitivas com as cognitivas, isto é, existe uma complementaridade dinâmica entre os diferentes tipos de habilidades. Segundo o próprio autor, essas interações também são peças-chave para o futuro dos indivíduos, principalmente por meio do *efeito multiplicador*, por meio do qual,

além de se complementarem, as habilidades são capazes de se autorreproduzir, gerando novas habilidades.

O artigo também ressalta o papel da educação infantil no aprendizado e a importância dos livros como materiais didáticos. Por outro lado, enfatiza-se o atraso escolar e a necessidade de o estudante ter uma ocupação no mercado de trabalho e desempenhar trabalho doméstico como fatores prejudiciais ao desempenho escolar.

Portanto, políticas públicas que visem a uma melhora no aprendizado escolar devem destacar e conscientizar sobre o papel da família nesse processo, tanto pelo incentivo aos estudos como pela importância da pré-escola.

Bibliografia

ALBERNAZ, A.; FERREIRA, F. H. G.; FRANCO, C. Qualidade e equidade na educação fundamental brasileira. *Pesquisa e Planejamento Econômico*, v. 33, n. 3, 2002.

ANDRADE, J. M.; LAROS, J. A. Fatores associados ao desempenho escolar: estudo multinível com dados do SAEB, 2001. *Psicologia: Teoria e Pesquisa*. v. 23, n. 1, p. 33-42, 2007.

BARBOSA-FILHO, F. H.; PESSOA, S. *A taxa de retorno da educação no Brasil*. Instituto Futuro Brasil, 2006. (Texto para discussão, 1).

BASSI, M. et al. *Disconnected:* skills, education, and employment in Latin America. Washington DC: Inter-American Development Bank, 2012.

BASU, K.; VAN, P. H. The economics of child labor. *American Economic Review*. v. 88, n. 3, p. 412-427, 1998.

BIONDI, R. L.; FELÍCIO, F. *Atributos escolares e o desempenho dos estudantes*: uma análise em painel dos dados do SAEB. Brasília: INEP, 2007. (Texto para discussão).

COLEMAN, J. et al. *Equality of educational opportunity*. Washington, DC: US Department of Health, Education and Welfare, 1966.

CORSEUIL, C. H.; SANTOS, D. D.; FOGUEL, M. *Decisões críticas em idades críticas*: a escolha dos jovens entre estudo e trabalho no Brasil e em outros países da América Latina, 2001. (Texto para discussão, 797).

CUNHA, F et al. Interpreting the evidence on life cycle skill formation. In: HANUSHEK, E. A., WELCH, F. (Orgs.). *Handbook of economics of education*. Amsterdam: North-Holland, 2006. p. 697-812.

FELÍCIO, F.; VASCONCELLOS, L. O efeito da educação infantil sobre o desempenho escolar medido em exames padronizados. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 35. Recife, 2007. *Anais*... Recife: Anpec, 2007.

FRANCO, A. M. P.; MENEZES-FILHO, N. A. Os determinantes do aprendizado com dados de um painel de escolas do SAEB. In: ENCONTRO NACIONAL DE ECONOMIA, 36. Salvador, 2008. *Anais...* Salvador: Anpec, 2008.

GONZAGA, G. et al. The effects of and apprenticeship program on labor market outcomes of youths in Brazil. In: MEETING OF THE BRAZILIAN ECONOMETRIC SOCIETY, 37. Porto de Galinhas, 2012. *Anais...* Rio de Janeiro: SBE, 2012.

INEP. *Portal do Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira*. Disponível em: <portal.inep.gov.br>. Acesso em: 15 abr. 2016.

HECKMAN, J. J. Policies to foster human capital. *Research in Economics,* v. 1, n. 54, p. 3-56. 2000.

HECKMAN, J. J.; KAUTZ, T. Hard evidence on soft skills. *Labour Economics*, v. 19, p. 451-464, 2012.

HECKMAN, J. J.; LOCHNER, L.; TABER, C. Explaining rising wage inequality: explorations with a dynamic general equilibrium model of labor earnings with heterogeneous agents. *Review of Economic Dynamics*, v. 1, n. 1, p. 1-58, 1998.

HECKMAN, J. J., STIXRUD, J.; URZUA, S. The effects of cognitive and noncognitive abilities on labor market outcomes and social behavior. *Journal of Labor Economics*. v. 24, n. 3, p. 411-482. 2006.

LUCAS, R. On the mechanics economic development. *Journal of Monetary Economics*. v. 12, p. 3-42, 1988.

MENEZES-FILHO, N. A. *Os determinantes do desempenho escolar do Brasil*. Instituto Futuro Brasil, 2007.

PNUD. *Innovar para incluir*: jóvenes y el desarrollo humano; informe de desarollo humano del Mercosur, 2009-2010. Buenos Aires: Libros del Zorzal, Programa das Nações Unidas para o Desenvolvimento, 2009.

ROMER, P. Increasing returns and long-run growth. *Journal of Political Economy*, v. 94, p. 1002-1037, 1986.

SAITO, M. Amartya Sen's capability approach to education: a critical exploration. *Journal of Philosophy of Education*, v. 37, n. 1, p. 17-31, 2003.

SEN, A. *Development as freedom*. Oxford: Oxford University Press, 1999.

WATTS, M; COMIM, F.; RIDLEY, B. Adaptive preferences and educational policies. In: HUMAN DEVELOPMENT AND CAPABILITY ASSOCIATION ANNUAL CONFERENCE. New Delhi. 2008. *Proceedings*... New Delhi: HDCA, 2008.

Uma análise da relação entre violência na escola e proficiência dos estudantes em matemática

Aline Dalcin

Introdução

O Brasil é um dos países mais violentos do mundo, e essa realidade se reflete no ambiente escolar. Nos últimos anos, o país apresentou altos indicadores de atentados à vida, presença de armas, furtos, roubos, agressões físicas e verbais, tráfico e consumo de drogas e ações de gangues dentro das escolas. Por causa da violência nas escolas, os estudantes se concentram menos nos estudos e perdem a vontade de ir às aulas, enquanto os professores têm menor estímulo para o trabalho e se tornam revoltados, nervosos e irritados. Esses comportamentos se contrapõem às metas de melhoria do ensino. Por isso, uma hipótese razoável a ser investigada é a de que a violência nas escolas é uma das principais razões da baixa qualidade educacional encontrada no Brasil, a qual atinge especialmente a disciplina de matemática. Nesse contexto, a principal questão levantada por este trabalho é se há relação entre a violência nas escolas e o desempenho dos estudantes em matemática, ou seja, se a violência nas escolas é um dos fatores determinantes do desempenho escolar em matemática.

Para se ter ideia da magnitude do problema da violência no Brasil, a taxa de homicídios cresceu nos últimos 20 anos, entre 1992 e 2012, cerca de 34,7%. Entre os jovens de até 24 anos, essa taxa aumentou, no mesmo período, cerca de 54,2% (DATASUS, 2013). Waiselfisz (2014) retratou com detalhes o mapa mundial da violência juvenil e mostrou que a situação é muito preocupante no caso brasileiro. Em 2010, o Brasil ocupava a oitava posição entre 95 países no *ranking* de violência juvenil, com a taxa de 54,5 homicídios por 100 mil jovens, número quase dez vezes superior ao apresentado pelos países vizinhos Argentina, Chile e Uruguai. Essa violência que envolve jovens não está restrita às ruas das cidades, mas atinge também, por exemplo, o ambiente escolar.

No contexto da produção acadêmica, a violência nas escolas é conceituada de formas diferentes. Neste trabalho, será utilizado o conceito de *violência na escola* de Charlot[1] (2002),

1 Bernard Charlot é professor titular emérito de ciências da educação da Universidade Paris 8, professor catedrático convidado da Universidade do Porto e professor visitante na Universidade Federal de Sergipe (UFS). É referência constante em trabalhos sobre violência na escola. Por exemplo, foi citado na pesquisa da UNESCO coordenada por Abramovay e Rua (2002).

que define e distingue as expressões "violência na escola", "violência à escola" e "violência da escola": *violência na escola* é a que ocorre dentro do ambiente escolar, sem estar relacionada com a natureza ou com as atividades da escola; *violência à escola* é a que ocorre dentro do ambiente escolar e que está relacionada com a natureza ou com as atividades da escola; por fim, a *violência da escola* está relacionada com a maneira como a escola e seus funcionários tratam os estudantes. Exemplos de violência na escola, à escola e da escola são, respectivamente, a ação de gangues no interior da instituição escolar, vandalismo à propriedade escolar e tratamento discriminatório dos estudantes por parte dos funcionários da escola. Para tornar tais definições mais claras, o autor também atenta para a diferença entre *violência*, *transgressão* e *incivilidade*: a *violência* está presente quando alguma lei é violada por meio do uso da força ou da ameaça; a *transgressão* está presente quando o comportamento é contrário ao regulamento interno da escola; enquanto a *incivilidade* está presente quando o comportamento contradiz as regras de boa convivência. Contudo, é preciso ressaltar que o acúmulo de incivilidades se transforma em violência quando é considerado como ataque à dignidade da vítima.

O Brasil apresenta estatísticas graves em relação à violência na escola, conforme a definição adotada neste trabalho. A partir dos microdados do Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB), é possível calcular indicadores para oito tipos de violência na escola[2]: *atentado à vida*, *presença de armas*, *furto*, *roubo*, *agressão física*, *agressão verbal*, *tráfico e consumo de drogas* e *ação de gangues*. Durante o ano letivo de 2011[3], 10,8% das escolas públicas registraram a ocorrência, dentro de suas dependências, de atentados à vida de estudantes, professores ou funcionários, enquanto 16,6% dessas escolas registraram o porte de armas brancas ou de fogo por membros da comunidade escolar. A ocorrência de furtos e roubos dentro da instituição escolar pública foi reportada por, respectivamente, 41,3% e 7,0% dos diretores. No mesmo ano, em 72,2% das escolas públicas brasileiras, foram registradas agressões verbais a estudantes, professores ou funcionários e, em 44,8% dessas escolas, foram registradas agressões físicas. Por fim, 45,8% e 15,3% das escolas públicas registraram, respectivamente, consumo ou tráfico de drogas e a ação de gangues em suas dependências ou proximidades. A partir desses dados, também é possível calcular quantos estudantes frequentaram, no ano letivo analisado, essas escolas com ocorrências de violência: 13,0%, 20,7%, 51,0%, 8,6%, 51,3%, 77,9%, 55,1% e 20,8% dos estudantes frequentaram escolas onde houve casos de atentado

2 A construção dos indicadores para os oito tipos de violência será explicada na seção "Dados, metodologia e estatísticas descritivas".
3 No SAEB 2013, não há dados de violência na escola reportados pelos diretores. Mais detalhes sobre os dados do SAEB são apresentados na seção "Dados, metodologia e estatísticas descritivas".

à vida, presença de armas, furto, roubo, agressão física e verbal, tráfico ou consumo de drogas e ação de gangues, respectivamente (INEP, 2011).

O problema da violência nas escolas, conforme descrito acima, induz comportamentos nos agentes de educação que se contrapõem às metas de melhoria da qualidade do ensino. Por exemplo, em uma pesquisa da UNESCO (ABRAMOVAY; RUA, 2002), realizada no ano 2000 em 14 capitais brasileiras, aproximadamente metade dos estudantes afirmaram que a violência na escola faz com que eles não consigam se concentrar nos estudos: os percentuais variam entre 38%, em Florianópolis, e 52%, em Manaus, estando a mediana em 46%. Aproximadamente um terço dos estudantes afirmaram ficar nervosos ou revoltados com as situações de violência que enfrentam em suas escolas: a cidade do Rio de Janeiro obteve o menor percentual (28%), enquanto Cuiabá obteve o maior percentual (39%). Também aproximadamente um terço dos estudantes responderam que a violência na escola faz com que eles percam a vontade de frequentar as aulas: o Rio de Janeiro obteve o menor percentual (27%), e Cuiabá, Goiânia, Fortaleza e Manaus obtiveram os maiores percentuais (34%). Ademais, 9% dos estudantes no Rio de Janeiro (maior percentual), e 3% dos estudantes em Florianópolis (menor percentual) declararam que não compareceram às aulas por causa de problemas de violência na escola. De acordo com a mesma pesquisa da UNESCO, a violência nas escolas também afeta o comportamento dos professores: eles têm menor estímulo para o trabalho, ficam revoltados com a situação, não conseguem se concentrar nas aulas, perdem a vontade de ir trabalhar e se tornam nervosos e irritados. Dado o aumento da violência desde 2000 até os dias de hoje, é possível que, caso a pesquisa mencionada acima fosse realizada novamente, os dados atualizados seriam ainda mais altos.

Ao induzir tais comportamentos, a violência nas escolas se associa à baixa qualidade educacional encontrada no Brasil, a qual atinge principalmente a disciplina de matemática. Essa baixa qualidade da educação no país é comprovada com os resultados obtidos pelos brasileiros no Programa Internacional de Avaliação de Alunos (*Programme for International Student Assessment* – PISA) e no Terceiro Estudo Regional Comparativo e Explicativo (TERCE): na prova do PISA de 2012, dos 65 países analisados, o Brasil apareceu na 58ª posição em matemática (OCDE, 2012); na prova do TERCE, aplicada em 2013, apenas 38,8% e 16,6% dos estudantes brasileiros da 3ª e da 6ª série do ensino fundamental, respectivamente, tiraram notas boas ou ótimas em matemática (UNESCO, 2015).

A simultaneidade dos fenômenos da baixa qualidade educacional e da violência nas escolas levanta as seguintes questões e hipóteses a serem testadas: existe relação entre

a violência na escola e o desempenho dos estudantes? A violência na escola é um fator determinante do desempenho escolar, juntamente com o *background* familiar, o clima escolar e outros? O presente trabalho utiliza os indicadores de violência na escola e de proficiência em matemática, presentes no SAEB, com o objetivo de analisar o impacto que a violência na escola tem sobre a proficiência dos estudantes brasileiros em matemática. Mais especificamente, busca-se verificar, a partir de regressões lineares e quantílicas, se a variável *violência na escola* tem impacto sobre a variável *proficiência em matemática no Brasil* nos anos de 2003, 2005, 2007, 2009, 2011 e 2013. A hipótese levantada por este trabalho é a de que a violência na escola reduz a proficiência dos estudantes em matemática.

Para a análise da hipótese proposta, o trabalho está dividido em quatro seções, além desta introdução: *revisão da literatura*; *dados, metodologia e estatísticas descritivas*; *resultados*; e *considerações finais*.

Revisão da literatura

Esta seção visa a examinar os trabalhos que analisaram empiricamente os efeitos da violência nas escolas sobre o desempenho dos estudantes. Para isso, o tópico se divide em duas subseções. A primeira destina-se a apresentar os trabalhos internacionais, e a segunda visa a apresentar os trabalhos brasileiros.

Literatura internacional

A literatura que relaciona a violência nas escolas ao desempenho dos estudantes é recente. Um dos primeiros autores a abordar o tema foi Grogger (1997). Esse autor analisou os efeitos da violência na escola – ou seja, posse de armas por parte de estudantes, brigas entre estes e conflitos entre estudantes e professores, os quais foram reportados pelos diretores – sobre a conclusão dos ensinos médio e superior por estudantes de instituições públicas nos Estados Unidos. Para tanto, foram utilizados os dados do "High school and beyond study" de 1984 e 1986, e cada ocorrência de violência na escola foi classificada como "séria", "moderada", "menor" ou "não existente". Controlando por características dos estudantes, das escolas e da região, os resultados das regressões por *probit* apontaram que a violência na escola do tipo "menor" reduziu a probabilidade de se concluir o ensino médio em um ponto percentual, e a probabilidade de ingressar no ensino superior, em 3,9 pontos percentuais. A violência na escola do tipo "moderado", por sua vez, reduziu a probabilidade de concluir o ensino médio em 5,1 pontos percentuais, e a probabilidade de ingressar no ensino superior, em 6,9 pontos percentuais. Para o tipo "sério", esses números foram, respectivamente, 5,7 e 15,9.

No ano seguinte, Coleman (1998) avaliou o impacto da violência nas escolas sobre a proficiência em matemática e em leitura dos estudantes norte-americanos da 8ª série. Foram testadas três variáveis da violência na escola: *comportamento violento ou indisciplinado*; *vitimização*; e *percepção sobre o grau de violência escolar*. Também foram incluídas outras variáveis regressoras: sexo, cor, condição socioeconômica, tipo de escola (pública, privada católica, privada de outra religião, privada sem religião) e localização (urbana, suburbana, rural). Os resultados, obtidos pelo "National education longitudinal study" de 1988 indicaram uma relação negativa – embora não significativa – entre as três medidas de violência escolar e a proficiência dos estudantes.

Bowen e Bowen (1999) trabalharam com os efeitos da violência dentro e nos arredores das escolas sobre a proficiência, a frequência e a disciplina dos estudantes norte-americanos dos ensinos fundamental e médio de escolas públicas. Os dados utilizados no trabalho foram coletados entre 1996 e 1997 pela Louis Harris and Associates, Inc. A violência nos arredores da escola foi mensurada por dois indicadores. O primeiro envolveu a *percepção dos estudantes* sobre a violência na região – foi perguntado aos estudantes sobre a probabilidade de jovens locais se envolverem com problemas com a polícia, uso de drogas, participação em gangues e ingestão de bebidas alcoólicas –, enquanto o segundo envolveu a *experiência pessoal dos estudantes* com a violência na região – foi perguntado se alguma vez nos últimos 30 dias eles presenciaram roubo, depredação da casa de um vizinho, venda de drogas, infração de alguma lei, ameaça com arma ou distribuição de bebidas alcoólicas. A violência dentro das escolas também foi mensurada por dois indicadores: novamente, o primeiro abordou a *percepção dos estudantes* – foi perguntado a eles sobre a probabilidade de ocorrerem na escola brigas, roubos, vandalismo, ingestão de bebidas alcoólicas, uso de drogas, porte de armas, agressões físicas ou verbais, preconceito racial, brigas de gangues ou assédio sexual –, enquanto o segundo abordou a *experiência pessoal dos estudantes* – foi perguntado se alguma vez nos últimos 30 dias eles brigaram com outro estudantes, tiveram medo de que alguém poderia incomodá-los ou machucá-los na escola, decidiram ficar em casa por medo de que alguém poderia incomodá-los ou machucá-los, perceberam algum conhecido portando arma ou foram atacados por alguém que usava arma na escola. Verificou-se que, mesmo com a presença de variáveis demográficas como controle, tanto a violência dentro da escola como em seus arredores influenciaram negativamente a proficiência, a frequência e a disciplina, e que os efeitos da violência nos arredores da escola foram mais significativos que os efeitos dentro dela.

Na década seguinte, Carrol (2006) apresentou um estudo sobre a relação entre atos violentos reportados pelos diretores (posse de arma, de substâncias controladas e de

bebidas alcoólicas, assalto a funcionários da escola, agressão resultante em ferimentos graves, agressão sexual, assalto envolvendo o uso de arma, ofensa sexual, roubo sem arma perigosa, aliciamento de menores, estupro, sequestro, ameaça de bomba, terrorismo e queima de propriedade escolar) e a proficiência em matemática e em leitura de estudantes da 8ª série de escolas públicas da Carolina do Norte (EUA), no ano letivo de 2003-2004. Foram acrescentadas como controles as variáveis de renda familiar, escolaridade dos pais, região urbana, tamanho das turmas, experiência dos professores, número de estudantes matriculados e outras características da escola. Como forma de corrigir possíveis problemas causados por variáveis omitidas, o autor utilizou o método de *regressões aparentemente não correlacionadas* (*Seemingly Unrelated Regressions* – SUR). Como resultado, verificou que a ocorrência de um ato violento reduz marginalmente o desempenho dos estudantes: as notas de matemática e de leitura foram reduzidas em 0,138 e 0,143, respectivamente.

A fim de apresentar a relação entre o número de crimes dentro e no entorno das escolas e o desempenho dos estudantes dos ensinos fundamental e médio em Atlanta (EUA), entre 1999 e 2002, McGarvey, Smith e Walker (2007) utilizaram dois métodos: os *mínimos quadrados ordinários* (MQO) e as *variáveis instrumentais* (VI). Como variáveis instrumentais, foram utilizados o número total de adultos na escola, a distância da escola à habitação pública mais próxima, o comprimento das rotas de ônibus do bairro, o número de estações ferroviárias no bairro e a distância a essas estações. Foi encontrado que, controlando por características das escolas e dos bairros, a ocorrência de mais um ato violento na escola fez com que a taxa de aprovação dos estudantes caísse 2,5 pontos percentuais por MQO e 4,0 pontos percentuais por VI, enquanto a ocorrência de mais 10 crimes por 100 habitantes no bairro fez com que a taxa de aprovação dos estudantes caísse 3,4 pontos percentuais por MQO e 6,4 pontos percentuais por VI.

Recentemente, Burdick-Will (2013) analisou os efeitos da taxa de crimes violentos ocorridos dentro da escola sobre o desempenho dos estudantes de Chicago – em testes padronizados de leitura e matemática e em provas específicas das escolas para as mesmas disciplinas. Para tanto, os dados do Departamento de Polícia de Chicago, os dados sobre as escolas públicas da cidade e os dados da *Consortium on Chicago School Research* para os anos entre 2002 e 2010 foram organizados em um painel. Controlando por características dos estudantes, das escolas e da região, os resultados das regressões que utilizaram um modelo de efeitos fixos apontaram um efeito negativo da taxa de crimes violentos na escola sobre as notas dos estudantes em testes padronizados: o aumento de um desvio padrão na taxa de crimes violentos reduziu as notas dos testes padronizados de leitura e de matemática, respectivamente, em

1,2% e 3,1% de um desvio padrão. A autora relaciona esse efeito negativo ao estresse cognitivo e à disfuncionalidade nas aulas causados pela violência. Em relação às notas de provas específicas das escolas, os resultados não apontam efeitos significativos.

Literatura brasileira

Existem poucos trabalhos sobre o tema no Brasil. O primeiro trabalho encontrado foi o de Severnini (2007). O autor investigou a relação entre a violência na escola (furtos, roubos, agressões físicas, presença de armas e drogas, ação de gangues e atentados à vida – reportados pelos diretores) e a proficiência dos estudantes em matemática e língua portuguesa. Para tanto, foram utilizados os dados do SAEB de 2003 referentes a estudantes da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio de escolas públicas. Nesse trabalho, a variável dependente foi a proficiência do estudante em matemática ou em língua portuguesa, e os regressores de maior interesse foram variáveis que indicam ou influenciam a violência: índice de violência na escola, qualificação do professor, variáveis *dummies* que representam a diferença entre professor e estudante em relação a sexo e etnia, número de estudantes na turma, proporções de meninos, de estudantes não brancos, de estudantes repetentes e de estudantes com baixo *background* familiar e, por fim, interações do índice de violência na escola com os regressores citados. Controlando por diversas outras características dos estudantes, dos professores, das turmas e das escolas, os resultados das regressões lineares e quantílicas indicaram que os estudantes que frequentaram escolas mais violentas apresentaram, em média, uma proficiência 0,47% inferior, e que a violência afetou mais os estudantes dos quantis mais baixos de proficiência.

Alguns anos depois, Teixeira (2011) voltou a abordar o assunto. O objetivo do segundo ensaio da tese do autor consistiu em mensurar o impacto da violência na escola (roubos, vandalismo, agressões etc.) reportada pelos diretores, sobre a proficiência dos estudantes de 4ª, 6ª e 8ª séries (5º, 7º e 9º anos) do ensino fundamental e 3ª série do ensino médio, em matemática e língua portuguesa, no estado de São Paulo. Para a consecução dessa proposta de trabalho, foram utilizados os dados do Sistema de Avaliação de Rendimento Escolar do Estado de São Paulo (Saresp) de 2007. A mensuração do impacto da violência sobre a proficiência foi realizada por meio de um modelo *logit* multinível, o qual possibilita a análise hierárquica dos dados. Dessa forma, foram considerados dois níveis de hierarquia: as *características dos estudantes* e as *características das escolas*. A utilização de um modelo *logit* multinível é o principal fator que diferencia o trabalho de Teixeira (2011) do trabalho de Severnini (2007). Tendo como variável dependente a *proficiência* e como variável regressora de interesse

a *violência*, e controlando pelas características dos estudantes e das escolas, o autor concluiu que a violência na escola reduziu em 0,54% a probabilidade de os estudantes da 3ª série do ensino médio apresentarem um desempenho satisfatório em matemática. Os resultados encontrados para as outras séries em matemática e língua portuguesa, e para a 3ª série do ensino médio em língua portuguesa, foram semelhantes.

Gama e Scorzafave (2013) analisaram a relação entre a violência na *região* da escola – e não *dentro* da escola, como fizeram Severnini (2007) e Teixeira (2011) – e a proficiência dos estudantes de 4ª e 8ª séries (5º e 9º anos) do ensino fundamental de escolas públicas, em matemática e língua portuguesa, no município de São Paulo. Foram utilizados dados de quatro fontes: os dados de 2006 sobre ocorrências criminais por distrito policial de São Paulo foram retirados do *site* da Fundação Sistema Estadual de Análise de Dados (Seade); o Censo Demográfico de 2000 do Centro de Estudos da Metrópole (CEM) disponibilizou as variáveis socioeconômicas; os dados de proficiência e de condição socioeconômica dos estudantes estavam disponíveis na Prova Brasil de 2007; e o Censo Escolar de 2007 forneceu os dados referentes aos professores e às escolas. O autor utilizou a *proficiência* dos estudantes em matemática ou em língua portuguesa como variável dependente, e o *número de ocorrências de diferentes categorias criminais* (homicídios dolosos, tentativas de homicídio e lesões corporais dolosas) registradas por cada distrito policial como variável regressora de interesse. As regressões lineares e quantílicas, controladas por características dos estudantes, *background* familiar, características das escolas, dos professores e socioeconômicas dos distritos da capital, tiveram os seguintes resultados: estudantes do 5º ano de escolas de regiões mais violentas tiveram, em média, menor proficiência, e a violência afetou mais os estudantes do 5º ano dos quantis mais altos de proficiência em matemática e dos quantis mais baixos de proficiência em língua portuguesa. Para o 9º ano, não foram encontrados efeitos significativos.

Por fim, Oliveira e Ferreira (2013) investigaram a relação que existe, no Brasil, entre a *violência na escola* (furtos, roubos, agressões físicas e verbais, presença de armas, consumo de drogas, ação de gangues e atentados à vida – reportados pelos diretores) e a *proficiência dos estudantes*, utilizando os dados de escolas públicas e privadas do SAEB de 2011. Para isso, foi utilizado o *método de misturas finitas*, o qual permite capturar diversas fontes de heterogeneidade não observada. A inovação trazida por esse trabalho está justamente na utilização do método de misturas finitas. Os resultados indicaram que os estudantes que estudaram em escolas mais violentas tiveram menor proficiência. Os resultados também apontaram que a relação entre violência e proficiência dos estudantes foi heterogênea nas escolas privadas e mais homogênea nas escolas públicas. Nas escolas privadas, as variáveis de violência que mais afetaram os estudantes de menor

desempenho e de maior desempenho da 4ª série (5º ano) do ensino fundamental foram, respectivamente, o atentado à vida e o consumo de drogas: os estudantes de menor desempenho tiverem suas notas reduzidas em 11,79 pontos com a ocorrência de um atentado à vida, e os estudantes de maior desempenho tiveram suas notas reduzidas em 7,22 com a presença de drogas. Para os estudantes de menor e maior desempenho da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental de escola privadas, as variáveis de atentado à vida (-19,52) e furto (-1,73) foram as maiores responsáveis pela queda do desempenho. Por sua vez, para todos os estudantes do 3º ano do ensino médio privado, o desempenho escolar foi afetado pela violência na escola, principalmente pela presença de armas. Por outro lado, nas escolas públicas, a variável de violência que mais afetou o desempenho dos estudantes – tanto de menor quanto de maior desempenho – foi o consumo de drogas, para todas as séries consideradas. O consumo de drogas foi responsável por uma redução entre 1,2 e 7,5 pontos nas notas desses estudantes de escolas públicas.

Dados, metodologia e estatísticas descritivas

Esta seção se divide em três subseções: a primeira destina-se a apresentar a base de dados utilizada; a segunda visa a apresentar a metodologia escolhida; e, por fim, na terceira subseção, serão expostas estatísticas descritivas da amostra estudada em relação à violência na escola e ao desempenho dos estudantes em matemática.

Dados

A base de dados deste trabalho é composta por todos os microdados da Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB) e da Prova Brasil disponíveis: 2003, 2005, 2007, 2009, 2011 e 2013. A ANEB e a Prova Brasil são avaliações que compõem o Sistema Nacional de Avaliação da Educação Básica (SAEB). O SAEB foi implementado em 1988 e constitui um mecanismo de coleta, sistematização e análise de dados sobre os ensinos fundamental e médio no Brasil. Seu objetivo principal consiste em fornecer aos gestores públicos informações sobre a qualidade educacional, a fim de subsidiar a formulação de políticas públicas adequadas à diversidade de situações presentes nos estados e nas regiões brasileiras.

Ao longo do tempo, o SAEB sofreu alterações. Em 2005, o Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), órgão do Ministério da Educação (MEC) responsável pela condução do SAEB, reformulou o processo de avaliação da educação básica. A partir daquele ano, o SAEB passou a ser composto por duas avaliações: a

Avaliação Nacional da Educação Básica (ANEB), chamada comumente de SAEB, e a Avaliação Nacional do Rendimento Escolar (Anresc), conhecida como Prova Brasil. Nesse novo formato, a ANEB engloba uma avaliação bianual que abrange, de forma amostral, estudantes de escolas públicas e privadas, em áreas urbanas e rurais, matriculados na 4ª série (5º ano) e na 8ª série (9º ano) do ensino fundamental e na 3ª série do ensino médio. A ANEB manteve as características, os objetivos e os procedimentos da avaliação da educação básica realizada até 2005 pelo SAEB, tendo como objetivo principal avaliar a qualidade da educação básica brasileira. A Prova Brasil, por sua vez, é uma avaliação censitária bianual que envolve os estudantes da 4ª série (5º ano) e da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental regular das escolas públicas, em áreas urbanas ou rurais, que têm, no mínimo, 20 estudantes matriculados nas séries avaliadas. A Prova Brasil foi idealizada para atender à demanda por informações sobre o ensino oferecido em cada escola. Dessa forma, o objetivo principal da Prova Brasil consiste em avaliar a qualidade do ensino ministrado em cada escola da rede pública. Em 2013, o SAEB passou a contar também com a Avaliação Nacional da Alfabetização (ANA). A ANA é uma avaliação censitária anual, cujo objetivo principal consiste em avaliar o nível de alfabetização dos estudantes da 2ª série (3º ano) do ensino fundamental em escolas públicas brasileiras.

Os instrumentos utilizados na ANEB e na Prova Brasil são as provas que avaliam a proficiência em língua portuguesa – com ênfase em leitura – e em matemática – com ênfase na resolução de problemas –, e os questionários contextuais. As questões das provas que avaliam a proficiência são elaboradas com base nas *matrizes de referência* do SAEB, isto é, a partir do conjunto de conteúdos e habilidades que representa, segundo estudos do INEP, o que se espera que os estudantes tenham desenvolvido ao final da 4ª série (5º ano) e da 8ª série (9º ano) do ensino fundamental e da 3ª série do ensino médio. Com as questões elaboradas, as provas são montadas de acordo com a metodologia denominada *blocos incompletos balanceados* (BIB), a qual distribui um grande número de questões em cadernos de prova com poucas questões. A partir dessas provas, a mensuração da proficiência é realizada de acordo com métodos escalares com base na *teoria de resposta ao item* (TRI), que estabelece que a probabilidade de resposta a uma questão é função da proficiência do estudante (variável não observável) e de parâmetros da própria questão, como grau de dificuldade, nível de discriminação e probabilidade de acerto ao acaso.

São aplicados cinco tipos de questionários: de estudantes, de turmas, de professores, de diretores e de escolas. Os estudantes respondem a perguntas sobre o ambiente e o nível socioeconômico familiar, hábitos de estudo e de leitura, trajetória escolar, entre outros aspectos. O diretor da escola e os professores de cada uma das disciplinas

avaliadas são convidados a fornecer informações sobre sua formação profissional, nível socioeconômico e cultural, estilo de liderança, formas de gestão, práticas pedagógicas, clima acadêmico e disciplinar, recursos humanos e pedagógicos. Há também um aplicador contratado pelo INEP que preenche questionários com informações sobre a turma (como turno) e sobre a escola (como infraestrutura e estado de conservação). Dessa forma, a base de dados utilizada contém, para cada estudante, informações individuais e sobre sua turma, seu professor, seu diretor e sua escola.

Metodologia

A partir da base de dados descrita acima, o modelo a ser estimado para cada ano é o seguinte:

$$Y_{ite} = \beta V_e + X'_{ite}\alpha + \varepsilon_{ite}$$

onde $Y_{ite}Y_{ite}$ é a proficiência em matemática do estudante *i*, da turma *t* da escola *e*; V_e V_e é o índice de violência na escola *e*; e $X_{ite}X_{ite}$ é o vetor com as variáveis de controle, as quais podem ser características do estudante, da família, da turma, do professor, do diretor ou da escola. O modelo será estimado, em primeiro lugar, por *mínimos quadrados ordinários* e, em segundo lugar, por regressões quantílicas incondicionais de Firpo, Fortin e Lemieux (2007).

Para se entender o motivo da escolha pelas regressões quantílicas incondicionais, é necessário lembrar alguns pontos: estimativas obtidas pelas regressões por mínimos quadrados ordinários podem ser interpretadas como o impacto das variáveis regressoras X, sobre a média incondicional populacional da variável dependente Y. Essa propriedade decorre do fato de que a média condicional E[Y|X] se aproxima no limite da média incondicional E[Y], de acordo com a lei das expectativas iteradas. Dessa forma, como E[E(Y|X)] = E[Y], E[Y|X] = Xß implica que E[Y] = E[X] e, consequentemente, ß indica o impacto de X sobre a média populacional de Y. Por sua vez, os quantis condicionais não se aproximam dos quantis incondicionais. Como consequência, estimativas obtidas pelas regressões quantílicas de Koenker e Basset (1978) – método utilizado por Severnini (2007) e Gama e Scorzafave (2013) – não podem ser interpretadas como o impacto das variáveis regressoras sobre determinado quantil da variável dependente. É por esse motivo que este trabalho utiliza as regressões quantílicas incondicionais de Firpo, Fortin e Lemieux (2007), as quais fornecem estimativas que podem ser interpretadas como o impacto.

Em relação ao modelo apresentado acima, serão abordadas duas especificações. Na primeira, a variável dependente é a *proficiência dos estudantes em matemática*, e a variável regressora de interesse é um índice criado a partir da soma[4] de *oito indicadores de violência na escola* construídos a partir do questionário do diretor – atentado à vida, presença de armas, furto, roubo, agressão física, agressão verbal, tráfico e consumo de drogas, e ação de gangue.[5] Esses oito indicadores de violência na escola foram construídos de maneira que cada um aponta a ocorrência (1) ou a não ocorrência (0) do evento violento em questão, em uma determinada escola durante o ano letivo. Em primeiro lugar, é importante ressaltar que a maioria desses indicadores considera tanto *agentes causadores externos* (estranhos à escola) quanto *internos* (professores, estudantes e funcionários), pois a ocorrência de eventos violentos na escola torna o ambiente inseguro, independentemente do seu agente causador. Em segundo lugar, esses indicadores consideram como *vítimas* tanto os estudantes quanto os professores e funcionários, pois um ambiente inseguro que produz incentivos distorcidos é resultado de eventos violentos, independentemente da vítima. Mais detalhes sobre os indicadores de violência na escola construídos a partir do questionário do diretor são apresentados no Quadro 1. Como cada indicador assume o valor 0 (zero) ou 1 (um), o índice varia de 0 (zero) a 8 (oito), de forma que 0 representa o nível mais baixo, e 8, o nível mais alto de violência na escola.

Quadro 1 – Indicadores de violência (questionário dos diretores)

Indicador	Descrição
Atentado à vida	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de atentado à vida de um membro da comunidade escolar por um agente causador, externo ou interno, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Presença de armas	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou o porte de armas brancas ou de fogo por algum membro da comunidade escolar, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Furto	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de furto de algum membro da comunidade escolar por um agente causador, externo ou interno, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.

4 A escolha desses oito indicadores foi realizada a partir da definição de violência na escola de Charlot (2002), a qual foi apresentada na introdução deste trabalho.
5 Alternativamente, foi criado um índice de violência na escola a partir da análise de componentes principais. Os resultados obtidos pelos dois índices foram bastante próximos. Por causa disso e da facilidade de interpretação do índice construído por soma, apenas os resultados para esse índice serão apresentados.

Roubo	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de roubo de algum membro da comunidade escolar por um agente causador, externo ou interno, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Agressão física	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de agressão física de algum membro da comunidade escolar por outro membro da mesma comunidade, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Agressão verbal	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de agressão verbal de algum membro da comunidade escolar por outro membro da mesma comunidade, nas dependências da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Consumo e tráfico de drogas	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ocorrência de consumo ou tráfico de drogas por um agente causador, externo ou interno, nas dependências ou nas proximidades da escola no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.
Ação de gangues	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou a ação de gangues, nas dependências ou nas proximidades da escola, no ano letivo analisado, e 0 se o diretor não reportou tal ocorrência.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Uma vez que esses indicadores de violência na escola são reportados pelos diretores, eles apresentam duas limitações: o planejamento das respostas e a subjetividade na percepção e na notificação da violência. A primeira limitação foi levantada por Grogger (1997). Esse autor destacou que, por um lado, os diretores podem responder aos questionários de maneira estratégica, fornecendo respostas que justificam o baixo desempenho de seus estudantes. Por outro lado, os diretores podem não querer revelar os verdadeiros níveis de violência em suas escolas, para não se mostrarem incompetentes. A primeira situação leva à superestimação do impacto da violência, e a segunda, à subestimação. No Brasil, segundo Sposito (2001), em certas épocas, a notificação de eventos violentos evidencia as fragilidades do trabalho pedagógico das escolas; em outras, a notificação pode resultar em ganhos para as escolas, como mais recursos materiais e humanos ou vantagens salariais para os professores. Considerando esse cenário, as duas situações descritas por Grogger (1997) – superestimação e subestimação – podem ocorrer no Brasil. Dessa forma, não se pode afirmar com certeza como se comporta o erro de medida dos indicadores de violência construídos a partir do questionário dos diretores, nem como isso influencia as estimativas deste trabalho.

A segunda limitação emerge do próprio desenho do questionário da Prova Brasil. Os diretores devem responder se determinado evento violento ocorreu ou não na sua escola durante o ano letivo. Alguns eventos – como atentados à vida – são marcantes e, consequentemente, não deixam dúvidas no processo de notificação. Ao contrário, a notificação de outros eventos – como agressões verbais – depende da percepção dos diretores e do seu envolvimento na comunidade escolar. Isso significa que, em escolas nas quais a violência parece já fazer parte do cotidiano, certos eventos violentos podem passar despercebidos pelos diretores. Em outras escolas nas quais eventos violentos não são muito comuns, os diretores podem acabar dando grande importância aos que ocorreram. Novamente, não se pode afirmar com certeza como se comporta o erro de medida dos indicadores de violência construídos a partir do questionário dos diretores, nem como isso influencia as estimativas deste trabalho.

Na segunda especificação, a variável regressora de interesse passa a ser um índice criado a partir da soma[6] de oito indicadores de violência na escola – atentado à vida, presença de armas, furto, roubo, agressão física, agressão verbal, consumo de drogas e ameaça[7] – construídos a partir do questionário dos professores. Novamente, esses oito indicadores foram construídos de maneira que cada um aponta a ocorrência (1) ou a não ocorrência (0) do evento violento em questão durante o ano letivo. Enquanto os diretores devem responder se determinado evento violento ocorreu ou não na sua escola durante o ano letivo, os professores devem responder se foram vítimas de determinado evento violento em suas turmas durante o ano letivo. Devido a essa diferença no desenho dos questionários, os indicadores construídos com base no dos professores se diferenciam dos indicadores construídos a partir do questionário dos diretores, por considerarem como vítima apenas os professores e como agentes causadores apenas os estudantes das turmas daqueles. Mais detalhes sobre os indicadores de violência na escola construídos a partir do questionário dos professores são apresentados no Quadro 2.

Quadro 2 – Indicadores de violência (questionário dos professores)

Indicador	Descrição
Atentado à vida	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que foi vítima de atentado à vida, por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.

6 Novamente, foi criado alternativamente um índice de violência na escola a partir da análise de componentes principais. Os resultados obtidos pelos dois índices foram bastante próximos, e serão apresentados apenas os resultados para o índice construído por soma.
7 Novamente, a escolha por esses oito indicadores foi feita a partir da definição de violência na escola de Charlot (2002).

Presença de armas	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que presenciou algum estudante de sua turma portando armas brancas ou de fogo no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Furto	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que foi vítima de furto por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Roubo	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que foi vítima de roubo por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Agressão física	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que foi agredido fisicamente por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Agressão verbal	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que foi agredido verbalmente por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Consumo de drogas	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o professor reportou que presenciou algum estudante de sua turma sob efeito de bebida alcoólica de drogas ilícitas no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.
Ameaça	Variável *dummy* que recebe o valor 1 se o diretor reportou que foi ameaçado por algum estudante de sua turma no ano letivo analisado, e 0 se o professor não reportou tal ocorrência.

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Assim como ocorre com os indicadores de violência na escola reportados pelos diretores, os indicadores reportados pelos professores apresentam a limitação da subjetividade na percepção e na notificação da violência. Em escolas nas quais a violência parece já fazer parte do cotidiano, certos eventos violentos de menor gravidade podem não ser considerados e reportados pelos professores. Em outras escolas nas quais eventos violentos não são muito comuns, os professores tendem a reportar todas as ocorrências. Dessa forma, os indicadores de violência construídos a partir do questionário dos professores também podem apresentar um erro de medida. Em relação a esse erro, mais uma vez, não se pode afirmar com certeza como se comporta, nem como influencia as estimativas.

Nas duas especificações do modelo, foram acrescidas características dos estudantes, da família, da turma, dos professores, do diretores e da escola como variáveis de

controle.[8] As características da turma foram acrescidas com o intuito de controlar o fenômeno do *peer effect* (efeito dos pares), que existe quando o desempenho de um estudante é afetado por sua interação com os demais colegas. As características dos professores e dos diretores foram acrescidas com o intuito de amenizar o viés de erro de medida, que surge pelo fato de os indicadores de violência serem reportados pelos diretores ou pelos professores. Por fim, as características da escola foram acrescidas com o intuito de amenizar o viés de omissão de variáveis relevantes, que surge em virtude de o ingresso de um estudante em uma determinada escola ser um processo de decisão familiar que não é aleatório, e de a permanência dos estudantes na escola depender da atratividade de tal escola.

Estatísticas descritivas

As Tabelas 1, 2 e 3 apresentam estatísticas descritivas da amostra estudada. A amostra foi construída a partir dos dados da ANEB de 2003, 2005 e 2013, e da Prova Brasil de 2007, 2009 e 2011.[9] A ANEB se diferencia da Prova Brasil por abranger estudantes de escolas privadas e estudantes matriculados na 3ª série do ensino médio. Consequentemente, para que não haja diferença na construção da amostra nos diferentes anos, foram utilizados apenas dados de estudantes matriculados na 4ª e na 8ª séries do ensino fundamental da rede pública.

A Tabela 1 apresenta as estatísticas descritivas em relação à proficiência dos estudantes em matemática. Como mostra essa tabela, em 2003, os estudantes de 4ª e 8ª séries do ensino fundamental da rede pública obtiveram uma proficiência média de 178,83 e 243,60 pontos em matemática, respectivamente. Como esperado, os estudantes da série mais avançada obtiveram proficiência maior do que os estudantes da série menos avançada nas duas disciplinas avaliadas. É importante ressaltar que a proficiência de uma série é comparável com a de outra série, e que a proficiência obtida em uma edição da ANEB ou da Prova Brasil é comparável com a obtida em outra edição. Após aumentos sucessivos, em 2013, a proficiência média dos estudantes da 4ª série foi igual a 222,56 pontos para matemática. Também em 2013, a proficiência média dos estudantes da 8ª série foi igual a 250,19 para matemática. Esses valores foram superiores aos obtidos nas cinco edições anteriores, o que indica uma melhora do desempenho dos estudantes ao longo do período analisado.

8 As variáveis de controle foram escolhidas em função dos resultados da literatura a respeito dos determinantes do desempenho escolar. Para maiores detalhes, ver: Ehrenberg, Goldhaber e Brewe (1995), Angrist e Lavy (1999), Hoxby (2000), Barros e outros (2001), Lazear (2001), Ferrão, Beltrão e Santos (2002), Krueger (2002), Ferguson (2003), Winston e Zimmerman (2003), Dee (2004, 2005), Machado (2005), Card e Rothstein (2006), Menezes-Filho (2007), Kassouf (2007), Jales (2010) e Tavares (2012).
9 Para 2003, 2005 e 2013, apenas os dados da ANEB estavam disponíveis; e, para 2007 e 2009, apenas os dados da Prova Brasil estavam disponíveis. Para 2011, por sua vez, estavam disponíveis tanto os dados da ANEB quanto os dados da Prova Brasil, os quais foram escolhidos para este trabalho.

As Tabelas 2 e 3 apresentam estatísticas descritivas dos indicadores de violência reportados pelos diretores e pelos professores, respectivamente. A partir dessas tabelas, tenta-se identificar se existe uma tendência de elevação em alguns indicadores e de queda para outros. De acordo com a Tabela 2, poucos indicadores reportados pelos diretores apresentaram clara tendência de queda. O fato de poucos indicadores apresentarem clara tendência de queda, em conjunto com o fato de que eles apresentam altos valores, indica que a violência na escola está consolidada no cotidiano brasileiro. Quando o primeiro ano analisado é comparado ao último, a Tabela 3 não indica muitas alterações nos altos valores dos oito indicadores de violência reportados pelos professores. Nesse cenário, assim como a violência na escola como um todo, a violência contra os professores também preocupa.

Com base nas Tabelas 2 e 3, é possível notar que os indicadores de violência reportados pelos diretores são maiores do que os reportados pelos professores. Isso se deve a alguns motivos: em primeiro lugar, os diretores reportam se o evento violento ocorreu na escola, enquanto os professores reportam apenas o evento ocorrido dentro de suas salas de aula. Em segundo lugar, os indicadores de violência reportados pelos diretores incluem eventos violentos que tenham como vítimas tanto professores quanto estudantes e funcionários, enquanto os reportados pelos professores envolvem apenas eventos violentos contra eles próprios. Por fim, os indicadores reportados pelos diretores consideram a violência causada por qualquer agente, interno ou externo, enquanto os reportados pelo professor consideram apenas a violência causada pelos estudantes das turmas. É também por esses três motivos que certos tipos de violência, como agressões físicas, têm maior importância relativa quando são reportados pelos diretores do que quando o são pelos professores. Além disso, é possível notar a diferença entre a média dos indicadores para a 4ª série e a mesma média para a 8ª série. Isso se deve à existência de escolas que têm turmas de 4ª série, mas não de 8ª série, e vice-versa.

Tabela 1 – Estatísticas descritivas da proficiência dos estudantes em matemática

Variável/ano	4ª série						8ª série					
	2003	2005	2007	2009	2011	2013	2003	2005	2007	2009	2011	2013
Proficiência em matemática	178,83 (42,84)	186,65 (44,16)	199,68 (43,72)	208,01 (46,21)	219,96 (47,52)	222,56 (50,64)	243,60 (45,61)	237,99 (45,05)	244,06 (43,51)	243,28 (45,06)	250,04 (46,60)	250,19 (46,72)
Amostra	8.773	2.980	192.807	46.481	213.537	22.186	9.288	4.171	337.318	46.966	262.472	554.143

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Tabela 2 – Estatísticas descritivas dos indicadores de violência reportados pelos diretores

Variável/ ano	Amostra	Índice de violência	Ação de gangues	Consumo e tráfico de drogas	Agressões verbais	Agressões físicas	Roubos	Furtos	Presença de armas	Atentados à vida
4ª série										
2003	8.773	2,29 (1,87)	0,17 (0,38)	0,48 (0,50)	0,56 (0,50)	0,30 (0,46)	0,04 (0,20)	0,44 (0,50)	0,25 (0,43)	0,05 (0,22)
2005	2.980	2,00 (1,75)	0,13 (0,34)	0,38 (0,48)	0,58 (0,49)	0,35 (0,48)	0,02 (0,13)	0,37 (0,48)	0,14 (0,35)	0,03 (0,16)
2007	192.807	2,60 (1,92)	0,18 (0,39)	0,44 (0,50)	0,69 (0,46)	0,47 (0,50)	0,06 (0,24)	0,49 (0,50)	0,18 (0,39)	0,09 (0,28)
2009	46.481	2,70 (2,00)	0,18 (0,38)	0,43 (0,50)	0,71 (0,45)	0,53 (0,50)	0,07 (0,26)	0,48 (0,50)	0,19 (0,39)	0,11 (0,32)
2011	213.537	2,46 (1,87)	0,14 (0,34)	0,46 (0,50)	0,71 (0,46)	0,48 (0,50)	0,05 (0,22)	0,39 (0,49)	0,14 (0,35)	0,09 (0,28)
2013[10]	22.186	–	–	–	–	–	–	–	–	–
8ª série										
2003	9.288	3,24 (1,91)	0,36 (0,48)	0,67 (0,47)	0,75 (0,43)	0,36 (0,48)	0,07 (0,25)	0,63 (0,48)	0,31 (0,46)	0,09 (0,28)
2005	4.171	3,07 (1,78)	0,24 (0,42)	0,74 (0,44)	0,75 (0,43)	0,41 (0,49)	0,05 (0,22)	0,50 (0,50)	0,34 (0,47)	0,04 (0,21)
2007	337.318	3,34 (1,93)	0,29 (0,45)	0,59 (0,49)	0,83 (0,37)	0,56 (0,50)	0,08 (0,27)	0,61 (0,49)	0,26 (0,44)	0,12 (0,33)
2009	46.966	3,16 (1,99)	0,24 (0,43)	0,53 (0,50)	0,81 (0,39)	0,58 (0,49)	0,09 (0,29)	0,56 (0,50)	0,22 (0,41)	0,13 (0,33)
2011	262.472	3,37 (1,91)	0,25 (0,43)	0,64 (0,48)	0,86 (0,35)	0,58 (0,49)	0,09 (0,28)	0,59 (0,49)	0,23 (0,42)	0,13 (0,33)
2013	554.143	–	–	–	–	–	–	–	–	–

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

10 Não há dados de violência reportados pelos diretores no ano de 2013.

Tabela 3 – Estatísticas descritivas dos indicadores de violência reportados pelos professores

Variável/ ano										
	4ª série									
	2003									
Amostra	Índice de violência	Ameaças	Consumo de drogas	Agressões verbais	Agressões físicas	Roubos	Furtos	Presença de armas	Atentados à vida
8.773	0,69 (1,24)	0,06 (0,24)	0,05 (0,22)	0,31 (0,46)	0,04 (0,19)	0,01 (0,12)	0,11 (0,31)	0,09 (0,29)	0,02 (0,14)
	2005								
2.980	0,26 (0,60)	0,01 (0,11)	0,02 (0,15)	0,16 (0,40)	0,01 (0,09)	0,00 (0,02)	0,03 (0,17)	0,03 (0,16)	0,00 (0,03)
	2007								
192.807	0,53 (0,96)	0,06 (0,24)	0,03 (0,17)	0,28 (0,45)	0,02 (0,15)	0,01 (0,09)	0,07 (0,25)	0,05 (0,21)	0,01 (0,10)
	2009								
46.481	1,07 (2,20)	0,13 (0,34)	0,11 (0,31)	0,31 (0,46)	0,10 (0,30)	0,09 (0,28)	0,13 (0,34)	0,11 (0,32)	0,09 (0,28)
	2011								
213.537	0,46 (0,86)	0,05 (0,23)	0,02 (0,15)	0,26 (0,44)	0,02 (0,14)	0,01 (0,08)	0,06 (0,23)	0,03 (0,17)	0,01 (0,09)
	2013[11]								
22.186	0,96 (0,89)	0,07 (0,25)	0,05 (0,22)	0,27 (0,44)	0,72 (0,45)	0,01 (0,11)	0,05 (0,22)	0,04 (0,21)	0,02 (0,13)
	8ª série								
	2003								
9.288	0,62 (0,99)	0,07 (0,25)	0,17 (0,37)	0,22 (0,42)	0,01 (0,10)	0,01 (0,08)	0,02 (0,15)	0,06 (0,23)	0,01 (0,10)
	2005								
4.171	0,31 (0,60)	0,03 (0,17)	0,03 (0,17)	0,36 (0,48)	0,00 (0,07)	0,00 (0,00)	0,01 (0,08)	0,02 (0,13)	0,00 (0,03)
	2007								
337.318	0,75 (1,12)	0,10 (0,30)	0,14 (0,35)	0,38 (0,49)	0,02 (0,13)	0,01 (0,10)	0,05 (0,22)	0,06 (0,24)	0,01 (0,10)
	2009								
46.966	1,22 (2,12)	0,16 (0,36)	0,19 (0,39)	0,39 (0,49)	0,09 (0,28)	0,08 (0,27)	0,12 (0,32)	0,12 (0,32)	0,08 (0,27)
	2011								
262.472	0,79 (1,10)	0,11 (0,31)	0,17 (0,38)	0,02 (0,12)		0,01 (0,08)	0,04 (0,20)	0,04 (0,20)	0,01 (0,10)
	2013								
554.143	1,24 (1,01)	0,12 (0,32)	0,21 (0,41)	0,78 (0,41)		0,01 (0,10)	0,04 (0,20)	0,06 (0,24)	0,02 (0,13)

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

11 Diferentemente dos índices dos anos antecedentes, os quais variam de 0 (zero) a 8 (oito), o índice de 2013 varia de 0 (zero) a 7 (sete), uma vez que os indicadores de agressões físicas e verbais foram aglutinados em um único indicador nesse ano.

Resultados

Esta seção apresenta e analisa os resultados do modelo proposto. Em primeiro lugar, são analisados os resultados da relação entre violência na escola e desempenho dos estudantes em matemática obtidos pelas regressões por *mínimos quadrados ordinários*. Em seguida, são analisados os resultados obtidos por *regressões quantílicas*.

Na Tabela 4, são apresentados os resultados da estimação da especificação do modelo que utiliza o índice de violência nas escolas reportado pelos diretores. Em 2007, 2009 e 2011, o coeficiente desse índice foi negativo e significativo[12] para as duas séries. Em 2005, o coeficiente não foi significativo para nenhuma das séries e, em 2003, ele foi negativo e significativo apenas para a 8ª série. A partir da Tabela 4a, nota-se que, em média, a ocorrência de um tipo de evento violento adicional em uma determinada escola, em 2011, esteve associada a uma redução de aproximadamente 0,79 e 0,58 ponto na proficiência em matemática para os estudantes da 4ª série e para os estudantes da 8ª série, respectivamente. Para se ter uma perspectiva da magnitude dos efeitos, pode-se comparar os coeficientes encontrados com o desvio padrão das notas. Como mostra a Tabela 4b, em 2011, a ocorrência de um tipo adicional de violência na escola reduziu a proficiência em matemática em 1,4% de um desvio padrão para os estudantes da 4ª série, e em 1,2% de um desvio padrão para os estudantes da 8ª série.

A Tabela 5 apresenta os resultados da estimação do modelo utilizando o índice de violência nas escolas reportado pelos professores. Em 2007, 2011 e 2013, o coeficiente desse índice foi negativo e significativo para as duas séries. Em 2003, 2005 e 2009, ele foi negativo e significativo apenas para a amostra de estudantes da 4ª série. De acordo com a Tabela 5a, os coeficientes apontam que, em média, a ocorrência adicional de um tipo de violência contra o professor em determinada turma, em 2013, esteve relacionada a uma redução de aproximadamente 1,33 e 1,18 ponto na proficiência em matemática para os estudantes da 4ª série e para os estudantes da 8ª série, respectivamente. A Tabela 5b exibe esses coeficientes em relação ao desvio padrão: em 2013, a ocorrência adicional de um tipo de violência contra o professor reduziu a proficiência em matemática, para estudantes da 4ª série, em 2,6% de um desvio padrão e, para estudantes da 8ª série, em 2,5% de um desvio padrão.

12 Neste trabalho, foram considerados estatisticamente diferentes de zero todos os coeficientes significativos a pelo menos 10%.

Tabela 4 – Coeficientes do índice de violência reportado pelos diretores

4a		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,4931 (0,337)	-0,8227** (0,415)
2005	0,4712 (0,814)	-0,0340 (0,675)
2007	-0,3322*** (0,051)	-0,2657*** (0,038)
2009	-0,6297*** (0,100)	-0,3039*** (0,104)
2011	-0,7884*** (0,054)	-0,5765*** (0,049)
2013	–	–

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

4b		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,0115	-0,0180**
2005	0,0107	-0,0008
2007	-0,0076***	-0,0061***
2009	-0,0136***	-0,0067***
2011	-0,0137***	-0,0124***
2013	–	–

*** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Tabela 5 – Coeficientes do índice de violência reportado pelos professores

5a		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	-1,1593** (0,556)	-0,8604 (0,682)
2005	-3,1895** (1,567)	-1,2606 (1,474)
2007	-1,1909*** (0,095)	-0,6449*** (0,061)
2009	-0,2258** (0,093)	-0,0870 (0,095)
2011	-1,3689*** (0,107)	-0,8655*** (0,078)
2013	-1,3307*** (0,335)	-1,1806*** (0,080)

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

5b		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	-0,0271**	-0,0189
2005	-0,0722**	-0,0280
2007	-0,0272***	-0,0148***
2009	-0,0049**	-0,0019
2011	-0,0238***	-0,0186***
2013	-0,0263***	-0,0253***

*** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Para comparar os resultados encontrados nas diferentes séries e para os diferentes índices de violência, são utilizados os coeficientes calculados em termos de desvio padrão. Ao comparar os resultados expostos nas Tabelas 4b e 5b, alguns padrões de comportamento chamam atenção. Em primeiro lugar, quando foi utilizado o índice de violência na escola reportado pelos diretores, os coeficientes encontrados foram maiores em módulo para a 4ª série, em comparação com a 8ª série. Considerando apenas os anos de 2007, 2009 e 2011, esses coeficientes apresentaram, em módulo, uma leve tendência de aumento. Em segundo lugar, quando foi utilizado o índice de violência na escola reportado pelos professores, os coeficientes continuaram sendo maiores na 4ª série. Considerando apenas os anos de 2009, 2011 e 2013, esses

coeficientes também aumentaram. Por fim, ao comparar os resultados obtidos com os diferentes índices, nota-se que a correlação entre a violência contra os professores e o desempenho escolar dos estudantes foi maior do que a correlação entre a violência na escola reportada pelos diretores e o desempenho escolar.

O resultado de que a violência causou uma redução maior das notas dos estudantes da 4ª série do que nas dos estudantes da 8ª série fortalece evidências fornecidas por estudos das áreas de sociologia e psicologia, como os de Macmillan (2001) e Sieger e outros (2004). Segundo esses estudos, a exposição a eventos violentos pode causar sérias consequências no desenvolvimento emocional, comportamental e social de crianças, e essas consequências são mais significativas para as crianças de menor idade, devido à incapacidade de elas compreenderem e darem uma resposta perante eventos de grande impacto. Consequentemente, é esperado que as crianças de uma série menos avançada sejam mais prejudicadas pela violência na escola que as crianças de uma série mais avançada.

O aumento da correlação entre a violência escolar e o desempenho dos estudantes nos últimos anos analisados pode ser resultado de um número maior de eventos violentos ocorridos ou de uma mudança no erro de medida. Os índices utilizados indicam apenas a ocorrência ou a não ocorrência de determinado tipo de violência. Infelizmente, não existem dados sobre o número de ocorrências. Por exemplo, uma escola com uma ocorrência de roubo é tratada da mesma forma que uma escola com dez ocorrências do mesmo ato. Portanto, o aumento da correlação entre a violência escolar e o desempenho dos estudantes pode ser resultado de um número maior de eventos violentos ocorridos nos últimos anos. Outra possibilidade é a de que o erro de medida tenha sofrido alterações. É possível que os diretores não tenham revelado níveis de violência tão altos quanto deveriam e que, nos últimos anos, tenham passado a fazê-lo. Também é possível que, nos últimos anos, os diretores tenham passado a responder aos questionários de maneira exagerada, a fim de justificar o baixo desempenho de seus estudantes. Nesses dois casos, os resultados encontrados indicariam um aumento da correlação entre a violência escolar e o desempenho dos estudantes.

O resultado de que a correlação entre a violência contra os professores e o desempenho escolar dos estudantes é maior do que a correlação entre a violência na escola reportada pelos diretores e o desempenho escolar apresenta duas possíveis explicações. Em primeiro lugar, o índice de violência reportado pelos professores é construído a partir de indicadores que apontam a ocorrência ou a não ocorrência de eventos violentos na *turma* do estudante, enquanto o índice reportado pelos diretores é construído a partir

de indicadores que apontam a ocorrência ou a não ocorrência de eventos violentos na *escola* do estudante. Assim, devido à maior proximidade do estudante em relação aos eventos violentos ocorridos na sua turma, é esperado que estes tenham maior efeito negativo sobre suas notas do que os eventos violentos ocorridos na sua escola. Em segundo lugar, os professores não têm as mesmas motivações dos diretores para responder aos questionários de maneira estratégica, o que torna o erro de medida do índice reportado pelos professores menor que o do reportado pelos diretores. Então, se os diretores subestimam os níveis de violência em suas escolas, e os professores revelam os verdadeiros níveis de violência em suas turmas, a correlação entre a violência contra os professores e o desempenho escolar tende a ser maior do que a correlação entre a violência reportada pelos diretores e aquele desempenho.

Em princípio, a correlação encontrada entre a violência e a proficiência dos estudantes em matemática pode parecer pequena. No entanto, como o índice reportado pelos diretores abrange oito indicadores de violência, isso significa que, em 2003, por exemplo, a diferença entre a proficiência de um estudante da escola menos violenta e a proficiência de um estudante da escola mais violenta alcançou quase 7 pontos; e, como o índice reportado pelos professores abrange oito indicadores de violência, isso significa que, em 2005, por exemplo, a diferença entre a proficiência de um estudante da turma menos violenta e a proficiência de um estudante da turma mais violenta alcançou quase 26 pontos. Além disso, tendo em vista que são muito pequenos os efeitos encontrados na literatura do impacto dos insumos educacionais sobre o desempenho dos estudantes, o fenômeno da violência na escola parece ter importância.

Os resultados acima corroboram os resultados encontrados tanto na literatura internacional quanto na brasileira. Por exemplo, eles se aproximam dos resultados encontrados por Burdick-Will (2013) e por Severnini (2007). Burdick-Will encontrou que o aumento de um desvio padrão na taxa de crimes violentos reduziu as notas de leitura e de matemática em 1,2% e 3,1% de um desvio padrão, respectivamente; por seu turno, Severnini (2007) encontrou que a ocorrência adicional de um tipo de violência na escola reduziu a proficiência em 3,2% de um desvio padrão. Assim, os resultados acima confirmam a hipótese levantada por este trabalho de que a violência na escola reduz a proficiência dos estudantes.

Todos os resultados apresentados até aqui são aplicáveis às médias condicionais. Contudo, pode haver heterogeneidade na resposta dos estudantes à violência. A fim de investigar as possíveis diferenças na associação entre violência e proficiência dos estudantes em matemática ao longo da distribuição de proficiência, as estimações

foram refeitas utilizando regressões quantílicas. As Tabelas 6a e 7a apresentam os resultados da estimação por regressões quantílicas do modelo utilizando o índice reportado pelos diretores. Como esperado, essas tabelas indicam que os coeficientes são maiores, em módulo, para os quantis mais elevados de distribuição, considerando que é mais fácil reduzir um ponto de uma nota acima de 200 pontos do que de uma nota próxima a 0. Dessa maneira, para comparar os coeficientes dos diferentes quantis, as Tabelas 6b e 7b, exibem tais quantis em termos do desvio padrão. Como mostram essas tabelas, a violência na escola reportada pelos diretores parece afetar mais os estudantes que se encontram na mediana, seguidos pelos estudantes que se encontram na cauda superior da distribuição. Foram omitidos os resultados da estimação por regressões quantílicas do modelo que utiliza o índice reportado pelos professores, pois eles indicam o mesmo padrão: a violência contra os professores parece afetar mais os estudantes que se encontram na mediana, seguidos pelos estudantes que se encontram na cauda superior da distribuição.

O resultado de que a violência afeta mais os estudantes que se encontram na mediana da distribuição pode ser explicado pela situação descrita a seguir. Os estudantes da cauda inferior da distribuição da proficiência tendem a apresentar maior dificuldade e menor motivação para os estudos, enquanto os estudantes da cauda superior tendem a apresentar maior facilidade e maior motivação. Assim, esses estudantes devem ser menos influenciados por fatores que afetam negativamente a aprendizagem. Os estudantes que se encontram na mediana, por outro lado, provavelmente são aqueles que apresentam maior sensibilidade à qualidade dos insumos escolares e ao ambiente da escola.

As características individuais dos estudantes também podem determinar a heterogeneidade de suas respostas à violência. Para examinar se os fatores *sexo*, *cor* e *condição socioeconômica* são capazes de potencializar ou reduzir a correlação entre violência e desempenho escolar, foram incluídas nas estimações variáveis de interação dessas características dos estudantes com o índice de violência. As Tabelas 8, 9 e 10 apresentam, respectivamente, os coeficientes da variável de interação do índice de violência com as variáveis *dummy* de sexo e cor, e com o indicador socioeconômico. A partir das Tabelas 9 e 9, percebe-se que a maioria dos coeficientes da variável de interação de sexo e violência, e da variável de interação de cor e violência, não foram significativos ou divergiram entre si sobre o sinal. Ou seja, encontrou-se pouca evidência de que o sexo ou a cor dos estudantes interfere na resposta destes à violência. Em contrapartida, a Tabela 10 sugere que a condição socioeconômica ampli-

fica o efeito maléfico da violência. Em outras palavras, quanto melhor é a condição socioeconômica do estudante, maior é a correlação negativa entre seu desempenho e a violência na escola. Esse resultado pode advir do fato de que os estudantes com pior condição socioeconômica são mais propensos a viver em bairros com alta criminalidade, por causa da falta de recursos para buscar um lugar melhor. Por isso, esses estudantes podem ser menos influenciados pela violência na escola, uma vez que outros eventos violentos já fazem parte do seu cotidiano.

Tabela 6 – Coeficientes do índice de violência reportado pelos diretores

6a			
Ano	**Quantil**	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,10	1,2162** (0,533)	-0,5261 (0,687)
	0,25	0,9152** (0,435)	-0,9869* (0,571)
	0,50	0,2009 (0,471)	-1,1119** (0,550)
	0,75	0,2235 (0,550)	-1,3349** (0,638)
	0,90	-0,1341 (0,653)	-1,5104* (0,864)
2005	0,10	0,1124 (0,821)	1,7119 (1,232)
	0,25	-0,5451 (1,051)	0,3126 (0,916)
	0,50	0,1233 (1,028)	0,1546 (0,843)
	0,75	2,2510 (1,583)	-1,2667 (1,064)
	0,90	-0,2962 (1,623)	-0,9755 (1,250)
2007	0,10	-0,0924 (0,077)	0,0344 (0,064)
	0,25	-0,1387** (0,066)	-0,0038 (0,053)
	0,50	-0,2111*** (0,068)	-0,1896*** (0,050)
	0,75	-0,3827*** (0,080)	-0,3757*** (0,060)
	0,90	-0,6441*** (0,100)	-0,6592*** (0,071)

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

6b			
Ano	**Quantil**	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,10	0,1035**	-0,0401
	0,25	0,0546**	-0,0544*
	0,50	0,0298	-0,1629**
	0,75	0,0098	-0,0550**
	0,90	-0,0066	-0,0751*
2005	0,10	0,0090	0,1107
	0,25	-0,0343	0,0154
	0,50	0,0205	0,02358
	0,75	0,0104	-0,0550
	0,90	-0,0152	-0,0527
2007	0,10	-0,0052	0,0022
	0,25	-0,0075**	-0,0002
	0,50	-0,0323***	-0,0299***
	0,75	-0,0161***	-0,0162***
	0,90	-0,0328***	-0,0333***

*** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Tabela 7 – Coeficientes do índice de violência reportado pelos diretores

7a			
Ano	**Quantil**	**4ª série**	**8ª série**
2009	0,10	-0,3408** (0,167)	-0,2285 (0,154)
	0,25	-0,2359* (0,141)	-0,4616*** (0,148)
	0,50	-0,4713*** (0,139)	-0,2956** (0,148)
	0,75	-0,8219*** (0,159)	-0,3177** (0,163)
	0,90	-1,1227*** (0,200)	-0,4076** (0,190)
2011	0,10	-0,2656*** (0,083)	-0,3002*** (0,095)
	0,25	-0,5670*** (0,076)	-0,3068*** (0,075)
	0,50	-0,9000*** (0,078)	-0,5890*** (0,067)
	0,75	-1,1028*** (0,085)	-0,7447*** (0,069)
	0,90	-1,1701*** (0,105)	-1,0550*** (0,086)
2013	0,10	–	–
	0,25	–	–
	0,50	–	–
	0,75	–	–
	0,90	–	–

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Tabela 8 – Coeficientes da interação da variável *dummy* de sexo com o índice de violência

8a – Diretores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	-0,3811 (0,644)	-0,8045 (0,765)
2005	-0,3939 (1,614)	0,4979 (1,138)
2007	0,1471 (0,093)	0,0417 (0,071)
2009	0,1673 (0,183)	0,0894 (0,192)
2011	-0,2781 (0,098)	-0,1543* (0,090)
2013	–	–

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

7b			
Ano	**Quantil**	**4ª série**	**8ª série**
2009	0,10	-0,0269**	-0,0216
	0,25	-0,0135*	-0,0294***
	0,50	-0,0672***	-0,0416**
	0,75	-0,0337***	-0,0137**
	0,90	-0,0572***	-0,0208**
2011	0,10	-0,0203***	-0,0191***
	0,25	-0,0324***	-0,0146***
	0,50	-0,1182***	-0,0837***
	0,75	-0,0477***	-0,0331***
	0,90	-0,0708***	-0,0573***
2013	0,10	–	–
	0,25	–	–
	0,50	–	–
	0,75	–	–
	0,90	–	–

*** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

8b – Professores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,2283 (1,021)	-2,2885 (1,474)
2005	1,5914 (3,059)	2,9453 (3,266)
2007	0,2713 (0,188)	-0,1621 (0,123)
2009	-0,1068 (0,167)	-0,0656 (0,183)
2011	-0,2803 (0,209)	-0,7195*** (0,153)
2013	0,2927 (0,634)	-0,1781 (0,168)

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Tabela 9 – Coeficientes da interação da variável *dummy* de cor com o índice de violência

9a – Diretores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,2871 (0,677)	1,5800** (0,782)
2005	1,0104 (1,639)	-2,6165** (1,240)
2007	-0,2751*** (0,098)	0,0387 (0,074)
2009	-0,1648 (0,197)	0,4339** (0,203)
2011	-0,4097*** (0,103)	-0,0093 (0,030)
2013	–	–

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Tabela 10 – Coeficientes da interação d o indicador socioeconômico com o índice de violência

10a – Diretores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	-0,2685 (0,249)	0,3887 (0,257)
2005	-0,1730 (0,476)	-0,2857 (0,447)
2007	-0,1737*** (0,030)	-0,1659*** (0,023)
2009	-0,1508** (0,060)	0,0956 (0,063)
2011	-0,0971*** (0,033)	-0,1467*** (0,030)
2013	–	–

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

9b – Professores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	1,4502 (1,089)	-1,5656 (1,443)
2005	-1,1766 (2,905)	-4,4042 (3,495)
2007	-0,4626** (0,197)	0,1851 (0,126)
2009	-0,0096 (0,177)	-0,1070 (0,189)
2011	-0,6219*** (0,220)	0,0939 (0,157)
2013	-0,4080 (0,697)	-0,1037 (0,166)

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

10b – Professores		
Ano	**4ª série**	**8ª série**
2003	0,0876 (0,356)	0,5019 (0,527)
2005	-0,8849 (1,228)	0,0089 (1,085)
2007	-0,1835*** (0,061)	-0,0710* (0,040)
2009	-0,1062* (0,056)	-0,1451** (0,059)
2011	-0,2440*** (0,069)	-0,0825 (0,053)
2013	0,0022 (0,222)	-0,2549*** (0,074)

Desvio padrão entre parênteses. *** p < 0,01; ** p < 0,05; * p < 0,1

Fonte: Elaboração própria com base nos dados do INEP (2003, 2005, 2007, 2009, 2011, 2013).

Considerações finais

Este trabalho buscou verificar se, no Brasil, a violência nas escolas teve correlação negativa com a proficiência dos estudantes em matemática nos anos de 2003, 2005, 2007, 2009, 2011 e 2013. Para a consecução de tal objetivo, foram utilizadas as metodologias de regressões lineares e regressões quantílicas, assim como os dados da ANEB e da Prova Brasil.

Os resultados obtidos indicaram, em primeiro lugar, que a ocorrência de um tipo de evento violento adicional esteve associada a uma redução da proficiência em matemática. Por exemplo, em 2011, o registro pelos diretores de um tipo adicional de evento violento em uma determinada escola esteve associado a uma redução de aproximadamente 0,79 e 0,58 na proficiência em matemática para os estudantes de 4ª e 8ª séries, respectivamente. Em 2013, o registro pelos professores de um tipo adicional de evento violento contra ele próprio esteve relacionado a uma redução de aproximadamente 1,33 e 1,18 na proficiência em matemática para os estudantes de 4ª série e 8ª séries, respectivamente. Para se compreender melhor a magnitude desses coeficientes, eles foram construídos em termos de desvio padrão das notas, as quais foram, em seguida, utilizadas para comparar os resultados. Dessa forma, encontrou-se que a correlação entre a violência e o desempenho dos estudantes foi maior para a 4ª série em relação à 8ª série e para o índice de violência reportado pelos professores em relação ao índice de violência reportado pelos diretores. Em segundo lugar, os resultados indicaram que existe heterogeneidade na resposta dos estudantes à violência escolar. A violência na escola parece afetar mais os estudantes que se encontram na mediana da distribuição das notas, bem como os estudantes com melhor condição socioeconômica.

Diante desse cenário, surge a necessidade de implementar políticas públicas de combate à violência na escola. Os resultados deste trabalho indicam alguns caminhos para a implementação dessas políticas. Em primeiro lugar, elas não devem se concentrar apenas no combate à violência entre os estudantes, mas também deve dar atenção à violência contra os professores. Em segundo lugar, elas devem estar atentas ao efeito heterogêneo da violência entre os estudantes e entre as séries. Sem ter noção das especificidades da relação entre violência e desempenho dos estudantes, as políticas públicas correm o risco de ter sua eficácia reduzida.

Como continuação desta pesquisa, sugere-se que sejam abordados outros problemas causados pela violência na escola, e que sejam utilizados outros dados sobre violência, como dados de vitimização reportados pelos estudantes. Ademais, destaca-se a importância da elaboração de trabalhos destinados à avaliação de políticas públicas de combate à violência nas escolas.

Bibliografia

ABRAMOVAY, M.; RUA, M. G. *Violências nas escolas*. Brasília: UNESCO, Coordenação DST/AIDS do Ministério da Saúde, Secretaria de Estados dos Direitos Humanos do Ministério da Justiça, CNPq, Instituto Ayrton Senna, UNAIDS, Banco Mundial, Usaid, Fundação Ford, Consed, Undime, 2002. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0012/001257/125791porb.pdf>. Acesso em: 26 abr. 2015.

ANGRIST, J. D.; LAVY, V. Using Maimonides' rule to estimate the effect of class size on scholastic achievement. *Quarterly Journal of Economics.* Cambridge, v. 114, n. 2, p. 533-575, May 1999. Disponível em: <http://qje.oxfordjournals.org/content/114/2/533.short>. Acesso em: 03 ago. 2015.

BARROS, R. P. et al. *Determinantes do desempenho educacional no Brasil*. Rio de Janeiro: IPEA, out. 2001. (Texto para discussão, 834). Disponível em: <http://ipea.gov.br/agencia/images/stories/PDFs/TDs/td_0834.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2016.

BOWEN, N.; BOWEN, G. L. Effects of crime and violence in neighborhoods and schools behavior and performance of adolescents. *Journal of Adolescent Research*. Thousand Oaks (USA), v. 14, n. 3, p. 319-342, Jul. 1999. Disponível em: <http://jar.sagepub.com/content/14/3/319.abstract>. Acesso em: 10 mai. 2015.

BURDICK-WILL, J. School violent crime and academic achievement in Chicago. *Sociology of Education*. Thousand Oaks (USA), v. 86, n. 4, p. 343-361, Oct. 2013. Disponível em: <http://www.ncbi.nlm.nih.gov/pmc/articles/PMC3831577/>. Acesso em: 15 dez. 2015.

CARD, D.; ROTHSTEIN, J. *Racial segregation and the black-white test score gap*. New York: National Bureau of Economic Research (NGER), Mar. 2006. (NGER working paper, 12078). Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w12078>. Acesso em: 12 abr. 2015.

CARROL, B. R. *The effects of school violence and crime on academic achievement*. Davidson: Davidson College, 2006. Disponível em: <https://econ.duke.edu/uploads/assets/dje/2006_Symp/Carroll.pdf>. Acesso em: 24 abr. 2015.

CHARLOT, B. Violência nas escolas: como os sociólogos franceses abordam essa questão. *Sociologias*. Porto Alegre, a. 4, n. 8, p. 432-443, jul./dez. 2002. Disponível em: <http://seer.ufrgs.br/index.php/sociologias/article/view/5864/3460>. Acesso em: 26 abr. 2015.

COLEMAN, B. E. School violence and student achievement in reading and Mathematics among eighth graders. 1998. Dissertation (Masters Degree) – University of Illinois, Urbana-Champaign (USA). Disponível em: <http://eric.ed.gov>. Acesso em: 30 abr. 2015.

DATASUS. *Indicadores e dados básicos Brasil, 2013*. Brasília: Ministério da Saúde, 2013. Disponível em: <http://tabnet2.datasus.gov.br/cgi/idb2013/matriz.htm>. Acesso em: 10 dez. 2015.

DEE, T. S. Teachers, race and student achievement in a randomized experiment. *Review of Economics and Statistics*. Cambridge, v. 86, n. 1, p. 195-210, Feb. 2004. Disponível em: <http://www.mitpressjournals.org/doi/abs/10.1162/003465304323023750?journalCode=rest#.Vqy7WiMrLIU>. Acesso em: 12 abr. 2015.

DEE, T. S. A teacher like me: does race, ethnicity or gender matter? *American Economic Review*. Nashville, v. 95, n. 2, p. 158-165, May 2005. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/4132809?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 24 abr. 2015.

EHRENBERG, R. G.; GOLDHABER, D. D.; BREWER, D. J. Do teachers' race, gender and ethnicity matter? Evidence from the National Educational Longitudinal Study of 1988. *Industrial and Labor Relations Review*. Ithaca (USA), v. 45, n. 3, p. 547-561, Apr. 1995. Disponível em: <http://digitalcommons.ilr.cornell.edu/cgi/viewcontent.cgi?article=1626&context=articles>. Acesso em: 12 abr. 2015.

FERGUSON, R. F. Teachers' perceptions and expectations and the black-white score gap. *Urban Education.* Thousand Oaks (USA), v. 38, n. 4, p. 460-507, Jul. 2003. Disponível em: <http://uex.sagepub.com/content/38/4/460.short>. Acesso em: 12 abr. 2015.

FERRÃO, M. E.; BELTRÃO, K. I.; SANTOS, D. P. O impacto de políticas de não-repetência sobre o aprendizado dos alunos da 4ª série. *Pesquisa e Planejamento Econômico*. Rio de Janeiro, v. 32, n. 3, p. 495-513, dez. 2002. Disponível em: <http://www.ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/141/76>. Acesso em: 12 abr. 2015.

FIRPO, S.; FORTIN, N. M.; LEMIEUX, T. *Unconditional quantile regressions*. New York: National Bureau of Economic Research, Jul. 2007. (NBER technical working paper, 339). Disponível em: <http://www.nber.org/papers/t0339>. Acesso em: 28 dez. 2015.

GAMA, V. A; SCORZAFAVE, L. G. Os efeitos da criminalidade sobre a proficiência escolar no ensino fundamental no município de São Paulo. *Pesquisa e Planejamento Econômico*. Rio de Janeiro, v. 43, n. 3, p. 447-477, dez. 2013. Disponível em: <http://ppe.ipea.gov.br/index.php/ppe/article/view/1465/1138>. Acesso em: 30 mar. 2015.

GROGGER, J. Local violence and educational attainment. *Journal of Human Resources.* Wisconsin, v. 32, n. 4, p. 659-681, Sep./Dec. 1997. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/146425?seq=1#page_scan_tab_contents>. Acesso em: 24 abr. 2015.

HOXBY, C. M. The effects of class size on student achievement: new evidence from population variation. *Quarterly Journal of Economics*. Cambridge, v. 115, n. 4, p. 1239-1285, Nov. 2000. Disponível em: <http://qje.oxfordjournals.org/content/115/4/1239.short>. Acesso em: 12 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2003*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2003. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2005*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2005. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2007*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2007. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2009*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2009. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2011*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2011. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

INEP. *Microdados da ANEB e da Anresc, 2013*. Brasília: Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira, 2013. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br>. Acesso em: 26 abr. 2015.

JALES, H. H. *Peer effects na educação no Brasil*: evidência a partir dos dados do SAEB. 2010. Dissertação (Mestrado) – Fundação Getúlio Vargas. Escola de Economia de São Paulo. Disponível em: <https://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/handle/10438/6940>. Acesso em: 04 ago. 2015.

KASSOUF, A. L. O que conhecemos sobre o trabalho infantil? *Nova Economia.* Belo Horizonte, v. 17, n. 2, p. 323-350, mai./ago. 2007. Disponível em: <http://www.scielo.br/scielo.php?pid=S0103-63512007000200005&script=sci_arttext>. Acesso em: 07 ago. 2015.

KOENKER, R.; BASSETT, G. Regression quantiles. *Econometrica*. Hoboken (USA), v. 46, n. 1, p. 33-50, Jan. 1978. Disponível em: <http://web.stanford.edu/~doubleh/otherpapers/koenker.pdf>. Acesso em: 19 mai. 2015.

KRUEGER, A. B. *Economic considerations and class size*. New York: National Bureau of Economic Research (NBER), Apr. 2002. (NBER working paper, 8875). Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w8875>. Acesso em: 12 abr. 2015.

LAZEAR, E. P. Educational production. *Quarterly Journal of Economics*. Cambridge, v. 116, n. 3, p. 777-803, Aug. 2001. Disponível em: <http://qje.oxfordjournals.org/content/116/3/777.short>. Acesso em: 06 mai. 2015.

MACHADO, D. C. *Escolaridade das crianças no Brasil*: três ensaios sobre a defasagem idade-série. 2007. Tese (Doutorado em Economia) – Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio), Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br>. Acesso em: 12 abr. 2015.

MACMILLAN, R. Violence and life course: the consequences of victimization for personal and social development. *Annual Review of Sociology*. Palo Alto (USA), v. 27, p. 1-22, Aug. 2001. Disponível em: <http://www.annualreviews.org/doi/abs/10.1146/annurev.soc.27.1.1>. Acesso em: 27 jan. 2016.

McGARVEY, M.; SMITH, W. J.; WALKER, M. B. The interdependence of school outcomes and school and neighborhood crime. Atlanta: Andrew Young School of Policy Studies, Mar. 2007. (Research paper series: working paper, 07-19). Disponível em: <http://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=976067>. Acesso em: 24 abr. 2015.

MENEZES-FILHO, N. *Os determinantes do desempenho escolar do Brasil*. São Paulo: Instituto Futuro Brasil, Ibmec-SP, FEA-USP, 2007. Disponível em: <http://www.todospelaeducacao.org.br//arquivos/biblioteca/f4e8070a-8390-479c-a532-803bbf14993a.pdf>. Acesso em: 07 jan. 2016.

OCDE. *Dados sobre proficiência escolar em matemática e leitura do PISA 2012*. Paris: OCDE/Programa Internacional de Avaliação de Alunos (PISA), 2012. Disponível em: <http://www.pisa.oecd.org>. Acesso em: 02 jun. 2015.

OLIVEIRA, V. R.; FERREIRA, D. Violência e desempenho dos alunos nas escolas brasileiras: uma análise a partir do SAEB 2011. *Revista Econômica*. Niterói, v. 15, n. 1, p. 84-114, jun. 2013. Disponível em: <http://www.revistaeconomica.uff.br/index.php/revistaeconomica/article/view/49>. Acesso em: 22 abr. 2015.

SEVERNINI, E. R. A relação entre violência nas escolas e proficiência dos alunos. 2007. Dissertação (Mestrado em Economia) – Pontifícia Universidade Católica (PUC-Rio), Rio de Janeiro. Disponível em: <http://www.maxwell.lambda.ele.puc-rio.br>. Acesso em: 22 abr. 2015.

SIEGER, K.; et al. The effects and treatment of community violence in children and adolescents: what should be done? *Trauma, Violence, & Abuse.* Thousand Oaks (USA), v. 5, n. 3, p. 243-259, Jul. 2004. Disponível em: <http://tva.sagepub.com/content/5/3/243.abstract>. Acesso: 27 jan. 2015.

SPOSITO, M. P. Um breve balanço da pesquisa sobre violência escolar no Brasil. *Educação e Pesquisa*. São Paulo, v. 27, n. 1, p. 87-103, jan./jun. 2001. Disponível em: <http://www.revistas.usp.br/ep/article/view/27856>. Acesso em: 11 abr. 2015.

TAVARES, P. A. Os impactos de práticas de gestão escolar sobre o desempenho educacional: evidências para escolas estaduais paulistas. São Paulo: São Paulo School of Economics, jul. 2012. (Working paper). Disponível em: <http://cmicro.fgv.br/sites/cmicro.fgv.br/files/file/WP%207_2012.pdf>. Acesso em: 07 ago. 2015.

TEIXEIRA, E. C. *Dois ensaios acerca da relação entre criminalidade e educação*. 2011. Tese (Doutorado em Economia Aplicada) – Escola Superior de Agricultura Luiz de Queiroz, Universidade de São Paulo, Piracicaba. Disponível em: <http://www.teses.usp.br/teses/disponiveis/11/11132/tde-17032011-100958/>. Acesso em: 22 abr. 2015.

UNESCO. *Tercer Estudio Regional Comparativo y Explicativo (TERCE)*: informe de resultados; logros de aprendizaje. Santiago: UNESCO, 2015. Disponível em: <http://www.unesco.org/new/es/santiago/terce-study/>. Acesso em: 16 mar. 2016.

WAISELFISZ, J. J. *Mapa da violência*: os jovens do Brasil. Brasília: Secretaria-Geral da Presidência da República, Secretaria Nacional de Juventude, Secretaria de Políticas de Promoção da Igualdade Racial, 2014. Disponível em: <www.juventude.gov.br/juventudeviva>. Acesso em: 26 nov. 2015.

WINSTON, G. C.; ZIMMERMAN, D. J. Peer effects in higher education. New York: National Bureau of Economic Research, Feb. 2003. (NBER working paper, 9501). Disponível em: <http://www.nber.org/papers/w9501>. Acesso em: 06 ago. 2015.

Sobre a conveniência de iniciar o ensino-aprendizagem da estatística e da probabilidade na pré-escola

Lori Viali

Introdução

Estamos na era dos dados. Muitos dados. Diariamente, são criados 2,5 quintilhões (10^{18}) de *bytes* de dados, e essa cifra logo será obsoleta. São tantos que aproximadamente 90% de todos os dados existentes foram gerados nos dois últimos anos. A tendência é exponencial. A grande dificuldade consiste em interpretar esses valores, isto é, transformá-los em informação. Para que dados se tornem informação é necessário que eles sejam tratados, ou seja, ordenados, agrupados e resumidos. Nossa capacidade de armazenar dados é bastante limitada. Assim, para que sejamos capazes de entender grandes conjuntos, é necessário que eles sejam resumidos. Esse resumo é realizado de forma tabular e, principalmente, gráfica. Dessa forma, entender e interpretar a informação tabular e gráfica é uma habilidade que qualquer sujeito precisa ter para que possa exercer plenamente a sua cidadania.

A nossa relação com a realidade é essencialmente quantitativa. Sujeitamo-nos diariamente a uma avalanche de estatísticas sobre tudo e todos, e a tendência é de crescimento desse processo. Até pouco tempo, os geradores de dados se limitavam ao jornal e ao rádio. Mais tarde, surgiu a televisão e, pouco depois, o computador. Um incremento na escalada da geração e criação de dados ocorreu com o estabelecimento da internet. Com ela, surgiu a comunicação *online*, isto é, a correspondência eletrônica, mais conhecida como *e-mail*. A internet também permitiu a troca de arquivos, ou seja, a troca de informações basicamente nos formatos binário e de texto. Se a internet representou um salto na geração de dados e informações, a criação da grande rede mundial, também conhecida como www (*world wide web*), foi o ápice desse processo evolutivo, que culminou com a popularização do hipertexto e da hipermídia. A rede possibilitou não apenas o envio e o recebimento de mensagens e arquivos, mas também incorporou toda uma gama de facilidades (serviços) que até então eram utilizados por poucos especialistas.

O lançamento dos navegadores gráficos representou uma nova escalada na quantidade de informações existentes. O crescimento da rede foi exponencial: milhares de novos

sites foram criados em pouco tempo, e milhões de usuários passaram a utilizar a internet para a troca de mensagens, para compartilhar arquivos e para postar de informações (textos, fotos e vídeos) em novos serviços que foram criados por intermédio de *blogs*, *flogs* e *vlogs*.

Entretanto, os verdadeiros crescimento e popularização da troca de dados e informações ainda eram tímidos, se compararmos com o ocorreu após a popularização da máquina fotográfica, dos gravadores de som e das filmadoras digitais. Com a mudança do mundo analógico para o digital, o aumento da quantidade dos dados atingiu um novo patamar. O ápice dessa evolução, ao menos por enquanto, ocorreu com a popularização dos telefones celulares e *tablets*, e com a criação das redes sociais. O celular incorporou em um único aparelho funções executadas por outros mecanismos, como gravadores de áudio, máquinas fotográficas, filmadoras digitais, rádio e televisão. Além disso, incorporou serviços executados por computadores e aparelhos de *fax*, como o envio e o recebimento de mensagens de texto, voz e vídeo e, ainda, o acesso à internet, a grande rede mundial. Com a queda do seu custo, na atualidade, praticamente todas as pessoas possuem um desses aparelhos. No Brasil, por exemplo, já existe mais do que um celular por habitante, e boa parte deles estão conectados à internet.

Assim, não é nenhuma surpresa que a quantidade de dados gerados diariamente tenha atingido tais proporções e que apresente uma tendência crescente, pois, a cada dia, mais pessoas passam a acessar os serviços proporcionados pela revolução digital. Esse crescimento ainda não mostrou sinais de inversão ou estabilização da tendência, que provavelmente irão ocorrer, embora seja é difícil precisar quando. Para dar sentido a tantos números, é preciso exercitar nossas habilidades de lidar com dados (números) desde a infância. Quanto mais cedo tomarmos contato com os métodos e os procedimentos de análise e interpretação de dados, mais natural e mais simples se tornará esse processo.

Outra fonte geradora de dados em grande quantidade é a ciência. O conhecimento gerado e divulgado por intermédio de artigos científicos atingiu proporções difíceis de se imaginar, quanto mais de se acompanhar. Por exemplo, a quantidade de dados, apenas na área do genoma, produz entre 2 e 40 *exabytes* de dados anualmente (GEBELHOFF, 2015).

Com o crescimento da população, dos negócios e do consumo de bens e serviços, são necessárias informações atualizadas sobre os diversos aspectos da vida econômica. Esse conhecimento é necessário para todos os agentes envolvidos no processo, tantos os

particulares quanto os públicos (governos): os primeiros para possibilitar a sobrevivência e o crescimentos dos negócios e empreendimentos, e os segundos para planejar e fornecer serviços à população e, com isso, arrecadar recursos dos contribuintes. Essas informações devem serem coletadas com rapidez e acurácia e, para tal, são utilizados levantamentos amostrais no lugar de censos, que são demorados, caros e exigem uma logística sofisticada. Por seu lado, os levantamentos amostrais são mais rápidos e mais baratos, mas, em contrapartida, apresentam um erro. O erro de amostragem pode ser determinado com a utilização de amostras probabilísticas. Assim, além da competência de analisar dados, a *literacia estatística* envolve a habilidade de se lidar com a *incerteza*.

A incerteza e a aleatoriedade são componentes da vida. Quanto antes os estudantes aprenderem a lidar com a contingência, menos propensos ele estarão a acreditar em ideias falsas e nas muitas explicações pseudocientíficas a que todos estão sujeitos pelos mais variados interesses, principalmente da parcela de "espertalhões" que vivem da ignorância e da ingenuidade de boa parte da população. Dessa forma, o ensino e a aprendizagem da probabilidade podem contribuir para que as crianças adquiram, desde cedo, as ideias de que a ciência é o melhor caminho e de que é necessário sempre questionar todas as verdades e raciocinar por si próprio. Assim se estará contribuindo para a formação de um cidadão crítico e com espírito científico. Fischbein, Pampu e Ion (1967) defendem que o ensino da probabilidade deve ocorrer desde a infância, pois o trabalho com esse tema, além de ser viável no início da escolaridade, pode evitar que as pessoas enraízem intuições errôneas sobre a aleatoriedade.

Cadež e Škrbec (2011) colocam que, quando compararam os resultados das opiniões de professores respondentes com os de pré-escola, ficou evidente que aqueles tinham uma ideia errônea sobre a possibilidade de as crianças diferenciarem eventos impossíveis, prováveis e certos, pois achavam que isso iria ocorrer somente após a idade de 8 anos, ao contrário dos achados da nossa pesquisa, que mostraram que as crianças são capazes de realizar isso muito mais cedo.

Segundo o NCTM (2000), o estudo da estatística e da probabilidade destaca a importância de se conjecturar, questionar e procurar por relações quando se formulam e se resolvem problemas reais. A probabilidade faz parte do mundo em que vivemos.

Milton sugere as seguintes razões para a introdução da probabilidade logo nos anos iniciais da escolaridade:

> a) o papel fundamental que a teoria da probabilidade desempenha na sociedade atual, principalmente na ciência; [e]

> b) a teoria da probabilidade requer muitos conceitos e habilidades matemáticas desenvolvidas em outras áreas (conjuntos, funções, números, contagem, tabelas e gráficos) (MILTON, 1975, p. 169).

A abordagem curricular

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN) lançados em 1998 recomendavam que o ensino da estatística fosse incorporado ao ensino da matemática. O documento destacava que:

> A matemática também faz parte da vida das pessoas como criação humana, ao mostrar que ela tem sido desenvolvida para dar respostas às necessidades e preocupações de diferentes culturas, em diferentes momentos históricos, e aqui leva-se em conta a importância de se incorporar ao seu ensino os recursos das tecnologias da comunicação. Para cumprir seus propósitos os Parâmetros Curriculares Nacionais de matemática:
> • incorporam o estudo dos recursos estatísticos constituindo um bloco de conteúdos denominado *tratamento de informação*;
> • destacam a importância do desenvolvimento do pensamento indutivo e dedutivo e oferecem sugestões de como trabalhar com explicações, argumentações e demonstrações (BRASIL, 1997, p. 59-60).

Note-se que existe a preocupação de se incorporar ao ensino o uso das tecnologias de informação e comunicação (TIC), e nada mais apropriado para a manipulação de grandes conjuntos de dados. A estatística é a disciplina que praticamente exige o uso de recursos computacionais, para que seu ensino não se restrinja simplesmente à manipulação de algoritmos. Note-se ainda que os PCN enfatizam o desenvolvimento do *pensamento indutivo*, que também faz parte da estatística aliada à probabilidade.

Embora os PCN recomendem que o ensino da estatística seja incorporado ao da matemática, convém lembrar que *estatística não é matemática*. Ela é uma disciplina metodológica que existe não por si, mas para oferecer a outras áreas de estudo um conjunto coerente de métodos e procedimentos para lidar com os dados. A necessidade de tal disciplina surge pela onipresença da *variabilidade* (COBB; MOORE, 1997).

O principal objetivo da educação estatística consiste em desenvolver nos estudantes o pensamento estatístico que, por sua vez, lida, em grande parte, com a variabilidade. O foco na variabilidade dos dados é o principal elemento que diferencia a estatística da matemática. Contudo, nos ensinos fundamental e médio, ela faz parte do currículo

de matemática, e o seu ensino compete aos professores desta disciplina. Em 2000, os Parâmetros Curriculares Nacionais do Ensino Médio (PCNEM) passaram a recomendar o mesmo para o ensino médio (BRASIL, 2000). Entretanto, o que se tem verificado é que, até hoje, essa incorporação ainda é tímida e muitas vezes nem chega a ocorrer. O problema é que a *formação dos professores* foi esquecida nessa equação. As diretrizes curriculares dos cursos brasileiros de licenciatura em matemática não contemplam a obrigatoriedade do ensino de estatística e probabilidade aos futuros professores. Dessa forma, é pouco provável que quem não aprendeu depois ensine. Assim, qualquer iniciativa que contribua para mudar esse quadro é bem-vinda. O Círculo da Matemática, por exemplo, poderia agregar o trabalho tanto estatística e com probabilidade, se é que ainda não o está fazendo.

Da 1ª à 4ª série do ensino fundamental, o item *tratamento da informação* dos PCN prevê os seguintes conteúdos e procedimentos:

> • Coleta, organização e descrição de dados.
> • Leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações.
> • Interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos.
> • Produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros.
> Obtenção e interpretação de média aritmética.
> • Exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de 'sorte'.
> • Utilização de informações dadas para avaliar probabilidades.
> • Identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais (BRASIL, 1997, p. 57-58).

O problema é como colocar em prática esses princípios, uma vez que a grande maioria dos cursos de pedagogia, que formam os professores do 1º ao 4º ano, praticamente não apresentam disciplinas de matemática, tampouco de estatística e probabilidade. Tanto a estatística quanto a probabilidade requerem uma abordagem diferenciada de ensino: a probabilidade, por sua peculiaridade de lidar com o acaso, e a estatística, por tratar de conjuntos de dados. O grande problema é que, como esses conteúdos estão incluídos na disciplina de matemática, os professores podem cair na tentação de ensiná-los da mesma forma e, ao final, a abordagem passe a ser apenas algorítmica. Note-se que a única medida de tendência central mencionada é a *média aritmética*.

Contudo, não haveria maiores dificuldades de se lidar com a *mediana* ou com a *moda*, que talvez sejam noções mais naturais e próximas das crianças. Além disso, algumas medidas de dispersão já poderiam ser introduzidas, principalmente a *amplitude* ou *intervalo*. Como escreve Lopes: "Acreditamos que um dos principais impedimentos ao ensino efetivo de probabilidade e estatística na educação básica refira-se à formação dos professores que ensinam matemática nesses níveis de ensino" (LOPES, 2008).

Os PCN da 1ª à 4ª série sugerem orientações didáticas, e não apenas conteúdos. Assim, no documento do PCN, é encontrada uma justificativa para a necessidade de se abordar tais conteúdos desde os anos iniciais. É colocado que:

> É cada vez mais frequente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que terão influência não apenas na vida pessoal, como na de toda a comunidade.
> Estar alfabetizado, neste final de século, supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações.
> Essa característica da vida contemporânea traz ao currículo de matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais (BRASI, 1997, p. 80).

Atualmente, a estatística e a probabilidade fazem parte do currículo dos ensinos fundamental e médio em vários países, incluindo o Brasil. Os motivos para a inclusão dessas disciplinas nos currículos desde a pré-escola são evidentes. Os estudantes são submetidos a uma grande quantidade de dados e à incerteza desde os primeiros anos. Assim, não existe uma justificativa razoável de que eles venham a aprender a lidar com o tratamento de dados e com a incerteza apenas na adolescência ou na vida adulta; mesmo porque, em um país como o Brasil, boa parte dos estudantes não chega ao ensino médio, e outra boa parte não irá cursar o ensino superior. Assim, é recomendável que os estudantes tenham conhecimentos mínimos para avaliar criticamente a grande carga de dados e informações que recebem diariamente, bem como tenham condições para lidar com a aleatoriedade e as contingências que a vida irá lhes impor.

Não são apenas acadêmicos que reconhecem a necessidade de se apresentar às crianças o tratamento de dados e da incerteza, além da matemática. Elliot Schrage, vice-presidente de comunicações do Facebook, coloca que as crianças devem "estudar estatística, porque a capacidade para entender dados (será) é a principal habilidade no século XXI" (SCHRAGE, 2014). Hal Varian, economista-chefe do Google, salienta: "Eu

continuo dizendo que o melhor trabalho nos próximos dez anos será o de estatístico e não estou brincando quando afirmo isso" (VARIAN, 2009). A *National Science Foundation* (NSF), órgão norte-americano financiador de pesquisas, destaca que a taxa de emprego para doutores em estatística ou matemática aumentou em até 99%, quando comparada com a de outras áreas. Assim, além da educação matemática, é necessário centrar esforços na educação estatística (WAY, 2015) .

Rebecca Nichols, diretora de educação da *American Statistical Association* (ASA), argumenta que: "O pensamento e o raciocínio estatístico completo precisam de tempo para se desenvolver. Assim como o pensamento matemático evolui ao longo do tempo, o mesmo ocorre com o estatístico" (WAY, 2015).

Convém lembrar que existem países de todos os tipos e tamanhos, e com variadas formas de governo e diferentes estruturas administrativas. Em muitos países, não existem certos ministérios ou órgãos, mas é muito difícil encontrar algum país que não tenha um departamento ou instituição de estatística, isto é, que colete dados da população. É virtualmente impraticável administrar, gerenciar ou governar sem dados. São necessários dados para termos informações, e estas, por sua vez, irão gerar conhecimentos, a partir dos quais serão estabelecidas as políticas públicas. Os censos, levantamentos sobre toda a população, são realizados em praticamente todas as regiões do mundo e vem sendo realizados ao longo da história, desde a Antiguidade.

Algumas razões para se incluir a probabilidade em um currículo de matemática são estas:

- ideias incorretas em probabilidade afetam as decisões das pessoas em situações importantes, tais como em testes médicos, vereditos de júris, investimentos, avaliações etc.;
- a probabilidade é essencial para entender qualquer procedimento inferencial da estatística;
- a probabilidade oferece recursos para modelar e "criar" realidades, tal como na física;
- os conceitos de *risco* – não apenas em mercados financeiros – e *confiabilidade* têm um relacionamento próximo e dependem da probabilidade;
- a probabilidade é um assunto interessante por si só e vale a pena estudá-la (BOROVCNIK; KAPADIA, 2010).

Prever o futuro é um negócio arriscado. Em períodos históricos nos quais as mudanças políticas e tecnológicas ocorrem rapidamente é ainda mais temerário. Contudo, a despeito das dificuldades, é essencial que a educação estatística seja trabalhada. Sem uma visão do futuro, é impossível o desenvolvimento efetivo de uma estrutura do presente. As crianças que estão entrando na educação primária agora estarão no mercado de trabalho na primeira metade do século XXI e, com isso, a educação que receberem servirá de base para o futuro (PEREIRA-MENDOZA, 1999).

A abordagem curricular em alguns países

Não foi apenas o Brasil que percebeu a necessidade do ensino e da aprendizagem de estatística e probabilidade já nos primeiros anos de escolaridade. Enquanto nosso país ainda não efetivou, de fato, o que a legislação estabelece, outros já tornaram realidade o ensino desses assuntos.

Segundo Carvalho (2006), foi nos anos de 1991 e 1992 que surgiram explicitamente nos currículos portugueses de matemática a unidade de estatística, nos três ciclos do ensino básico obrigatório, que envolve estudantes com idades entre 6 e 16 anos. O objetivo é que, ao final desse ciclo, todos os estudantes tenham os conhecimentos de estatística considerados essenciais para todos os cidadãos. As habilidades a serem desenvolvidas incluem a leitura, a construção e a interpretação de informações tabulares e gráficas.

Segundo Batanero, Arteaga e Contreras, "as diretrizes curriculares na Espanha ampliam o ensino de estatística, começando no primeiro ciclo da educação primária e reforçando os conteúdos ao longo de todo o ensino obrigatório" (BATANERO; ARTEAGA; CONTRERAS, 2011, p. 2). Os mesmos autores acrescentam que, embora o ensino de estatística já aconteça há pelo menos 20 anos nas escolas espanholas, existe uma tendência recente de introduzi-lo a crianças de idade cada vez menor e de renovar o ensino, tornando-o cada vez mais experimental. Nas novas orientações curriculares espanholas, é possível observar um forte incremento da estatística na escola primária.

Os "Padrões e princípios para a matemática escolar" do *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) dos Estados Unidos colocam que os cinco conteúdos-padrão são: *números e operações*, *álgebra*, *geometria*, *medidas e análise de dados* e *probabilidade*. O início dos conteúdos de análise de dados e probabilidade está previsto desde a pré-escola. Os "Principles and Standards for School Mathematics" (PSSM) colocam ainda que os programas instrucionais do jardim da infância ao grau 12 devem permitir que todos os estudantes desenvolvam as habilidades de:

• formular questões que possam ser respondidas com a coleta, a organização e a apresentação de dados;

• selecionar e utilizar métodos estatísticos apropriados para analisar dados;

• desenvolver e avaliar inferências e previsões que tenham como base os dados;

• entender e aplicar conceitos básicos de probabilidade.

Os PSSM foram lançados no ano 2000, após uma ampla consulta a professores da disciplina, matemáticos e pesquisadores educacionais. O documento do NCTM estabelece seis princípios (*equidade*, *currículo*, *ensino*, *aprendizagem*, *avaliação* e *tecnologia*) que descrevem as recomendações da associação para os programas de matemática.

No Brasil, os PCN de matemática do 1º ao 4º ano foram publicados em 1997. Neles, um dos blocos considerados foi o *tratamento da informação*. Na descrição dos conteúdos conceituais e procedimentais para o tratamento da informação, detalhados anualmente, foi considerado que, no primeiro ciclo, deve-se proceder à:

> • leitura e interpretação de informações contidas em imagens;
> coleta e organização de informações;
> • criação de registros pessoais para comunicação das informações coletadas;
> • exploração da função do número como código na organização de informações (linhas de ônibus, telefones, placas de carros, registros de identidade, bibliotecas, roupas, calçados);
> • interpretação e elaboração de listas, tabelas simples, de dupla entrada e gráficos de barra para comunicar a informação obtida;
> • produção de textos escritos a partir da interpretação de gráficos e tabelas (BRASIL, 1997, p. 52).

Para o segundo ciclo, as recomendações são que se faça a:

> • coleta, organização e descrição de dados;
> • leitura e interpretação de dados apresentados de maneira organizada (por meio de listas, tabelas, diagramas e gráficos) e construção dessas representações;
> • interpretação de dados apresentados por meio de tabelas e gráficos, para identificação de características previsíveis ou aleatórias de acontecimentos; produção de textos escritos, a partir da interpretação de gráficos e tabelas, construção de gráficos e tabelas com base em informações contidas em textos jornalísticos, científicos ou outros;
> • obtenção e interpretação de média aritmética;
> • exploração da ideia de probabilidade em situações-problema simples, identificando sucessos possíveis, sucessos seguros e as situações de 'sorte';

> • utilização de informações dadas para avaliar probabilidades;
> • identificação das possíveis maneiras de combinar elementos de uma coleção e de contabilizá-las usando estratégias pessoais (BRASIL, 1997, p. 61-62).

Como justificativa para a inclusão do tratamento da informação – que, como pode ser visto na citação seguinte, inclui não apenas a estatística, mas também a *probabilidade* e a *contagem* (análise combinatória) –, os PCN de matemática do 1º ao 4º ano de 1997 argumentam que:

> É cada vez mais frequente a necessidade de se compreender as informações veiculadas, especialmente pelos meios de comunicação, para tomar decisões e fazer previsões que terão influência não apenas na vida pessoal, como na de toda a comunidade. Estar alfabetizado, neste final de século, supõe saber ler e interpretar dados apresentados de maneira organizada e construir representações, para formular e resolver problemas que impliquem o recolhimento de dados e a análise de informações. Essa característica da vida contemporânea traz ao currículo de matemática uma demanda em abordar elementos da estatística, da combinatória e da probabilidade, desde os ciclos iniciais (BRASIL, 1997, p. 84-85).

A abordagem pedagógica

A ASA sugere que um currículo para a pré-escola (jardim de infância) pode partir da observação de que as crianças estão imersas em dados, tais como as suas preferências (cores, músicas, brinquedos, jogos etc.), contagens (número de livros, brinquedos etc.) e medidas (peso, altura etc.). Assim, existem várias oportunidades para que os estudantes possam entender que dados não são apenas números, e que a estatística transforma números em informação. Os professores podem solicitar que os estudantes coletem dados uns dos outros em aula e, posteriormente, pensem sobre questões que podem ser formuladas sobre a amplitude dos valores coletados, dando início assim aos princípios do pensamento estatístico.

O mesmo ocorre com os jogos em que o acaso desempenha um papel relevante, como os de adivinhação (de idade, altura, peso, cor ou comida preferida de um colega). Há também os experimentos como os de lançamento de bolas ao cesto, de acerto a um alvo com o lançamento de uma bola e similares. Por fim, as previsões, como da temperatura diária, do número de irmãos de um colega, da cor preferida e tantos

outros podem preparar o terreno para o pensamento probabilístico e para a utilização da inferência em etapas posteriores da vida escolar dos estudantes.

Nesse aspecto, pode-se destacar o Projeto Círculo da Matemática (2016), uma iniciativa que, no Brasil, recebe o apoio do Instituto TIM e que tem como objetivo apoiar o aprendizado de matemática de crianças que estudam em escolas públicas em várias regiões do país, despertando o gosto pela matemática e, desta forma, melhorando a sua aprendizagem. Esse tipo de iniciativa é ideal para que os estudantes tenham os primeiros contatos com a probabilidade e a estatística. A introdução da probabilidade pode ser realizada por intermédio dos jogos, e a estatística por meio de pequenos projetos ou enquetes que podem ser realizados entre os próprios estudantes. A introdução de gráficos e tabelas pode ser realizada de forma lúdica nesses encontros não formais.

Pereira-Mendoza (1999) argumenta que, nos primeiros anos de escolaridade, é impossível separar totalmente a estatística da matemática. Nessa fase, as crianças não internalizam a separação das entidades estatística em relação à matemática. A natureza da educação fundamental não deve envolver o ensino de estatística e matemática como entidades separadas. A distinção que nós educadores fazemos não tem significado para as crianças pequenas.

A estatística não é probabilidade. A estatística faz uso da probabilidade, assim como utiliza outros ramos da matemática. Contudo, a estatística e a probabilidade têm origens diferentes. Enquanto uma nasceu pela necessidade de controle do Estado sobre os cidadãos, a outra teve origem nos estudos sobre os jogos de azar e o risco. Entretanto, no século XIX, a estatística e a probabilidade convergiram e, assim, nasceu a *estocástica*. Nos anos iniciais, essa separação não é relevante, nem é necessário mencionar a ideia de que "estatística não é matemática". Mais tarde, as crianças, se forem orientadas no sentido de conhecer a história e o desenvolvimento dessas disciplinas, irão perceber naturalmente as suas diferenças e proximidades.

Quanto à *metodologia*, são várias as abordagens possíveis. O objetivo aqui não consiste em recomendar esta ou aquela abordagem pedagógica, mas defender a necessidade de se ensinar tanto a estatística quanto a probabilidade o mais cedo possível na vida das pessoas. Contudo, já existe literatura com experimentos realizados, por exemplo, com a resolução de problemas, conforme Botelho (2011), ou jogos, o que pode ser visto nos trabalhos de Batista e Borba (2015), Estevam (2013), e Santos e Santos (2016). O uso de projetos para o ensino de estatística na infância é relatado por Souza (2008),

enquanto que a utilização de recursos computacionais, como o TinkerPlots, é abordada no trabalho de Monteiro e Martins (2016). Alvarenga, Nobre e Paiva (2016) realizaram um levantamento sobre recursos computacionais que podem ser utilizados para a educação estatística de estudantes do 1º ano do ensino fundamental. Esses trabalhos podem ser utilizados pelos professores que participam do Círculo da Matemática, como exemplos de atividades executadas com os estudantes para que eles tenham as primeiras noções de estatística e probabilidade. Certamente existe uma literatura internacional mais ampla, mas acredita-se que seja mais produtiva a utilização de exemplos que já foram testados com os estudantes brasileiros.

Essa pequena amostra de abordagens pedagógicas para o ensino de estatística ou probabilidade para crianças fornece subsídios para se chegar à conclusão de que as mesmas abordagens utilizadas para o ensino dessas disciplinas para estudantes mais velhos podem ser adotadas com crianças, desde que, é claro, a linguagem e as atividades sejam elaboradas levando em conta a idade dos estudantes. A exposição precoce ao raciocínio estatístico e probabilístico tem como consequência estudantes que, desde cedo, irão desenvolver o pensamento crítico a respeito dos inúmeros estímulos que recebem cotidianamente na forma de tabelas e, principalmente, gráficos. Para se entender plenamente uma informação, é necessário saber avaliar de forma crítica os dados que ela contém, e isso ocorre com frequência em todas as mídias. Um estudante com olhar crítico não irá facilmente aceitar ou divulgar informações errôneas ou mal intencionadas.

As abordagens sugeridas nos PSSM do NCTM envolvem a resolução de problemas, raciocínio e prova, comunicação, conexões e representações. Os resultados esperados dos estudantes estão distribuídos em estágios e envolvem da pré-escola ao 2º ano, do 3º ao 5º ano, do 6º ao 8º ano e do 9º ao 12º ano (FERRINI-MUNDY, 2000).

A história da estatística e da probabilidade poderá ser utilizada para que os estudantes, e principalmente as crianças, valorizem os conteúdos aprendidos. Histórias vívidas e lúdicas são um recurso valioso para se ensinar tanto a estatística quanto a matemática (probabilidade). Contudo, esse recurso é negligenciado, e apenas alguns professores o utilizam para ilustrar e valorizar as aulas e o conhecimento que está sendo tratado.

Nesse sentido, Bellhouse coloca que:

> tanto na utilização de dados modernos ou históricos em aula a mesma questão se faz presente. Os estudantes respondem mais positivamente a qualquer apresentação de dados quando a origem científica dos dados é

> apresentada e quando alguns dos pontos de dados feitas na introdução dos mesmos são ilustrados na análise. O assunto, neste caso, não é a história e como ela é utilizada e sim, ao invés, é ter familiaridade com os dados, conhecendo o contexto de onde eles surgiram e, desta forma, o entusiasmo do professor sobre o problema é transmitido ao aluno (BELLHOUSE, 2005, p. 4).

Outra possibilidade é a do *ensino orientado por dados*, por meio do qual os estudantes devem criar investigações, formular questões de pesquisa, coletar dados, realizar enquetes, executar experimentos, descrever e comparar conjuntos de dados, utilizar e entender medidas e diagramas estatísticos, propor e justificar conclusões e previsões, tendo como base os dados (BURRIL; CAMDEN, 2006). Essa abordagem apresenta a virtude de integrar os conceitos estatísticos – principalmente da estatística descritiva – com os probabilísticos (amostragem aleatória) e, dessa forma permite um tratamento natural da estocástica. Essa abordagem é bastante adequada para a pedagogia do questionamento utilizada pelo Círculo da Matemática, principalmente a abordagem de jogos, que pode ser empregada para apresentar conceitos probabilísticos.

Conclusões

Infelizmente nós não temos uma estimativa da parcela da população que tem literacia estatística. O que se sabe é que ela não deve ser pequena, que o desenvolvimento dessa habilidade é crítico atualmente, que será cada vez mais importante para a cidadania no futuro e que o seu desenvolvimento na população leva tempo. Assim, é crucial que o ensino e a aprendizagem de estatística e probabilidade iniciem o mais cedo possível na vida das pessoas. É fato sabido que, quanto mais cedo uma criança for exposta a uma língua diferente da materna, mais facilmente ela aprenderá essa língua. Isso também é verdadeiro para a matemática e a estatística, pois, além de conceitos e procedimentos próprios, as duas áreas apresentam uma linguagem particular. Assim, o gosto pela matemática e pela estatística pode ser despertado ainda na infância, desde que as crianças sejam estimuladas a isso. A iniciativa do Círculo da Matemática pode reforçar essa exposição aos conceitos estatísticos e probabilísticos, uma vez que a escola regular pouco ou quase nada trabalha com esses conteúdos.

O desenvolvimento dos raciocínios estatístico e matemático é essencial para a inserção na sociedade atual, sendo que esses raciocínios são complementares, no sentido de que, em conjunto, eles tornarão mais forte o currículo de matemática. Não faz sentido esperar

até o ensino médio ou superior para apresentar aos estudantes os conceitos estatísticos e probabilísticos, e mesmo da estocástica. O motivo é que esses conceitos são tratados cotidianamente pela imprensa, tanto nos veículos que pretendem transmitir informações, como os telejornais, quanto na publicidade. É na filtragem de anúncios publicitários e na sua avaliação crítica que reside um dos principais motivos de se apresentar aos estudantes os conceitos estatísticos e probabilísticos o mais cedo possível.

Contudo, essas recomendações curriculares normalmente são ignoradas, uma vez que, com frequência, o ensino de estatística é reduzido ou esquecido, ou ainda, na melhor das hipóteses, é ensinado com poucos ou nenhum exemplo de aplicações reais. Muitas vezes, o ensino da estatística consiste apenas na realização de cálculos e na demonstração de alguns teoremas, com poucas oportunidades de projetar experimentos, analisar dados ou conectar a estatística com o processo geral de levantamentos. Como consequência disso, os estudantes terminam o ensino médio com pouco entendimento sobre os princípios básicos da análise de dados, que explicam muitos dos problemas encontrados na utilização da estatística na vida diária e profissional, ou nos cursos de nível universitário (MELETIOU, 2003).

A dificuldade quanto à introdução desses conceitos, no ensino elementar ou mesmo na pré-escola, reside na formação dos professores. Se os docentes de matemática têm uma formação deficiente tanto em estatística quanto em probabilidade (VIALI, 2008), imagine-se a formação de um professor de pré-escola ou dos primeiros anos de escolaridade. Se os currículos de matemática apresentam uma ou, no máximo, duas disciplinas de estatística e probabilidade, os de pedagogia sofrem uma carência ainda maior nessa área. A formação matemática já é mínima, enquanto a estatística e probabilística é praticamente inexistente. Conhecimentos didáticos e pedagógicos não são suficientes: é necessário ter ainda o conhecimento do conteúdo e, principalmente, do contexto. O conhecimento do conteúdo é passível de obtenção na universidade, ou mesmo na forma de autoconhecimento; contudo, o conhecimento do contexto será obtido apenas com a experiência e, principalmente, com um estudo aprofundado do conteúdo.

Bibliografia

ALVARENGA, Náysa Taboada Silva; NOBRE, Isaura Alcina dos Santos; PAIVA, Maria Auxiliadora Vilela. Objetos de aprendizagem na Educação Estatística nos anos iniciais. In: ENCONTRO DE COMBINATÓRIA, ESTATÍSTICA E PROBABILIDADE DOS ANOS INICIAIS. Recife, Pernambuco, 01-04 mar. 2016. *Anais eletrônicos do ENCEPAI*. Recife: ENCEPAI, 2016.

BATANERO, Carmen; ARTEAGA, Pedro; CONTRERAS, J. Miguel. El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana*. v. 2, n. 2, p. 1-20, 2011.

CADEŽ, T. H.; ŠKRBEC, M. Understanding the Concepts in Probability of Pre-School and Early School Children. *Eurasia Journal of Mathematics, Science & Technology Education*, v. 7, n. 4, p. 263-279, 2011.

BATANERO, C. *Statistics education in school mathematics*: challenges for teaching and teacher education. ICMI/IASE, 2006.

BELLHOUSE, D. R. Probability and statistics ideas in the classroom: lessons from history. In: SESSION OF THE INTERNATIONAL STATISTICAL INSTITUTE, 55. Sidney, 2005. *Proceedings*… Sidney: International Statistical Institute, 2005. p. 1-10.

BOROVCNIK, M.; KAPADIA, R. Research and developments in probability education internationally. In: British Congress for Mathematics Education. London, 2010. *Proceedings*… London, 2010.

BOTELHO, K. L. *Teaching statistics to elementary children*: using a problem-solving approach to enhance learning; Providence, RI: Honors Projects Overview, Rhode Island College, 2011.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Básica. *Parâmetros curriculares nacionais do ensino médio (PCNEM), parte III*: ciências da natureza, matemática e suas tecnologias. Brasília: MEC/SEB, 2000.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: matemática. Brasília: MEC/SEF, 1997.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Fundamental. *Parâmetros curriculares nacionais*: terceiro e quarto ciclos do ensino fundamental; matemática. Brasília: MEC/SEF, 1998.

BURRIL, G.; CAMDEN, M. (Eds.). *Curricular development in statistics education*: International Association for Statistical Education 2004 Roundtable. Voorburg, the Netherlands: ISI, 2006.

CARVALHO, C. *Olhares sobre a educação estatística em Portugal*. Recife: SIPEMAT, 2006. p. 1-16.

COBB, G. W.; MOORE, D. S. Mathematics, Statistics, and Teaching. *The American Mathematical Monthly*, v. 104, n. 9, p. 801-823, 1997.

FERRINI-MUNDY, J. Principles and Standards for School Mathematics: a Guide for Mathematicians. *Notices of the AMS*, v. 47, n. 8, p. 869-876, 2000.

FISCHBEIN, E. *The intuitive sources of probabilistic thinking in children*. Hingham (MA): Kluwer, 1975.

FISCHBEIN, E.; PAMPU, I.; ION, M. L'intuition probaliste chez l'nfant. *Enfance*, v. 20, n. 2, p. 193-208, 1967.

GATTUSO, L. Statistics and Mathematics. Is it possible to create a fruitful links? In: ROSSMAN, A.; CHANCE, B. (Eds.). *Proceedings of the Seventh International Conference on Teaching Statistics*. Salvador: IASE/ISI, 2006.

GEBELHOFF, R. *Sequencing the genome creates so much data we don't what to do with it*. 7 Jul. 2015.

HAWKINS, A.; JOLLIFFE, F.; GLICKMAN, L. *Teaching statistical concepts*. New York (NY): Routledge, 2014.

LETI, G. The birth of statistics and the origins of the new natural sciences. *Metron*, v. 58, n. 3/4, p. 185-211, 2000.

LOPES, C. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. *Cadernos CEDES*, v. 28, n. 74, p. 57-73, 2008.

MELETIOU, M. On the formalist view of mathematics: impact on statistics instruction and learning. In: European Conference in Mathematics Education , 3. Bellaria, 2003. *Proceedings*... Bellaria (Italy): European Research in Mathematics Education Society, 2003.

MÉXICO. Secretaría de Educación Pública. *Programa de estudio, educación secundaria*. México. Dirección General de Desarrollo Curricular de la Subsecretaría de Educación Básica de la Secretaría de Educación Pública, 2006.

MILTON, K. C. Probability in the primary school. *Australian Mathematics Teacher*, n. 31, p. 169-178, 1975.

NCTM. *Principles and standards for school mathematics*. Reston (VA), 2000.

OTTAVIANI, M. G. A history of the teaching of statistics in higher education in Europe and the United States, 1600 to 1915. In: MORRIS, R. (Ed.). *Studies in mathematics education*. Paris: UNESCO, 1991. (The Teaching of Statistics, 7).

PEREIRA-MENDOZA, L. Statistics education of primary children in the twenty-first century. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON MATHEMATICS EDUCATION INTO THE 21st CENTURY. Cairo, 14-18 Nov. 1999. *Proceedings*… Cairo. Egypt: Triforum, 1999. p. 258-262.

SCHEAFFER, R. L. Statistics and mathematics: on making a happy marriage. In: BURRILL, G. (Ed.). *NCTM 2006 yearbook*: thinking and reasoning with data and chance. Reston (VA): NCTM, 2006. p. 309-321.

SCHRAGE, Elliot. The case for starting statistics education in kindergarten. *Quartz*, 05 Aug. 2014. Disponível em: <https://qz.com/245311/the-case-for-starting-statistics-education-in-kindergarden/>.

TAYLOR, F. M. Why Teach Probability in the Elementary Classroom? *LATM: Louisiana Association of Teachers of Mathematics*, v. 2, n. 1, [s.d.]. Disponível em: <http://www.lamath.org/journal/Vol2/taylor.pdf> .

VARIAN. Hal Varian on how the web challenges managers. *McKinsey & Company Quarterly*, Jan. 2009. Disponível em: <http://www.mckinsey.com/industries/high-tech/our-insights/hal-varian-on-how-the-web-challenges-managers>.

VIALI, L. O Ensino de estatística e probabilidade nos cursos de licenciatura em matemática. In: SIMPÓSIO NACIONAL DE PROBABILIDADE E ESTATÍSTICA – SINAPE, Estância de São Pedro, 2008. *Anais*... São Paulo: Associação Brasileira de Estatística, 2008.

WAY, J. The case for starting statistics education in kindergarten. *Quartz*, 2015. Disponível em: <http://qz.com/245311/the-case-for-starting-statistics-education-in-kindergarden/>. Acesso em: 5 ago. 2015.

Parte 3

A abordagem do *Math Circle*

O *Math Circle*

Bob e Ellen Kaplan

Nossas vidas são impulsionadas pelo amor e pelo sentido. Enfocamos nosso amor em algumas outras pessoas e esperamos encontrar sentido por meio da fé em crenças, organizadas ou confusas. Porém, durante todo esse tempo existe a matemática, que revela o sentido do mundo ao nosso redor e em nós mesmos, destrinchando acontecimentos passados para revelar sua bela estrutura. Nenhuma pedrinha cai, nenhum falcão sobe em movimentos espirais, mas estão em jogo forças equilibradas, descritas por equações elegantes. As formas que vemos, os ritmos que ouvimos, eles participam em formas perfeitas e atemporais.

Apesar disso, a matemática desenvolveu a reputação de ser o juiz frio e distante dos nossos valores. Você está marcado para a vida e fracassa. Pois toda a resiliência da infância e as recompensas por outras vocações, o selo em seu ser, seu espírito, sua sensação de não ter uma mente suficientemente alada para os voos mais altos, tudo isso se soma aos nossos pensamentos mais sombrios.

Como isso é devastador... E como é desnecessário quando qualquer um – todos! – pode desfrutar das glórias da matemática e falar a sua língua tão fluentemente quanto a própria língua nativa! Pois é a nossa língua mais natural, a língua em que foi escrito o livro do mundo e a que falamos sem conhecer quando pegamos uma bola, giramos um pião, amarramos nossos sapatos ou atravessamos a rua – a língua de como as coisas se interligam e se movimentam, por natureza e ao nosso comando.

Por que não parece ser assim? Porque ensinamos a matemática de uma forma agonizantemente ruim, levando uma geração após a outra à perplexidade com tédio – se tiverem sorte –, mas geralmente levando ao desespero com o fracasso. Nossa espécie engenhosa e exuberante é feita para se curvar diante da repetição mecânica, para se render a todo e qualquer pensamento crítico, para aceitar cegamente regras impostas por alguma Autoridade Oculta. Ensine esportes dessa forma e não teremos jogos. Ensine culinária dessa forma e morreremos de fome.

Vamos dar meia-volta agora. Todos nós fervilhamos de curiosidade – dê a isso algo com que se alimentar. Você percebeu que os números naturais se esgotam invisivelmente?

Existe um último número? E, caso não, onde eles continuam – depois da margem do universo? O que eles são realmente – eles têm uma realidade física, como as estrelas, o fogo ou a água? E se eles chegam ou não a um fim, eles não se comprimem tão fortemente que entre quaisquer dois deles sempre existe outro, metades e quartos e até frações mínimas, sempre uma média entre dois números quaisquer? Algum tipo de número pode vazar através da peneira dessas frações? Nós os inventamos ou os descobrimos? O 3 tem a mesma realidade da Lua, ou o 0 a mesma realidade do 3, ou o 11 a mesma realidade do 0, ou $\sqrt{-1}$ a mesma realidade do 11? Todos os triângulos têm um ponto de equilíbrio e, caso sim, onde e por que? Quantos cantos tem um cubo de dez dimensões? Por que um pássaro se lança da forma como o faz, ou uma cadeia de montanhas, ou uma cordilheira? Por que a Lua não cai sobre a Terra, ou a Terra sobre o Sol? O jogo dos números abstratos pode responder a essas perguntas concretas? Se soubéssemos por que as ondas correm e se curvam como o fazem, entenderíamos melhor as estações, os corações e o mercado – e essas razões de comprimentos dos lados dos triângulos rotantes nos dizem algo sobre essas ondas? Por que 2 e 3 são os únicos fatores primários de 12, mas o 13 não tem nenhum? Por que você pode construir e circundar um polígono regular de ângulos retos com seis lados, mas não com sete? Os números e as formas rígidas são blocos de construção definitivos do nosso mundo, da nossa mente e do nosso entendimento?

Apresente um mistério inacessível a qualquer círculo pequeno de companheiros, e eles ficarão perdidos durante horas sobre quais foram os assuntos prementes do dia. Nas conversas animadas, a troca de conjeturas e refutações abrirá estradas na avassaladora mata cerrada e descobrirá clareiras e caminhos, vislumbres de respostas e vistas súbitas. Eles não precisam ser exploradores famosos por suas aventuras passadas, ou especialmente treinados: todos têm aquilo de que precisam acondicionado no conjunto entre seus ouvidos, que fará o que a mente sempre fez – alargar as fronteiras, cultivar a terra ao seu lado e ampliar incansavelmente a exploração do desconhecido. Ah, natureza selvagem! É o nosso direito de nascença, exercido com entusiasmo ao menor estímulo dado pelos mais velhos da pequena tribo – não informado, mas pedido, à medida que se desenvolve o orgulho pelo outro e pelo seu próprio ser. É sempre uma luta e uma revelação: vivemos à beira da descoberta, lidando bem com as habilidades variadas da coorte.

Um Círculo da Matemática apenas facilita esse encontro de mentes, colocando um líder entusiasmado no meio de um pequeno grupo de aventureiros – nove ou dez, suficientemente poucos para terem trocas vibrantes que tenham como foco uma única questão escolhida pelo fato de "estar na ponta dos dedos". A idade do grupo, seu

nível de sofisticação matemática, a experiência e o bom gosto do líder levarão ao tipo certo de pergunta. "Existem números entre os números?" atrai a imaginação de crianças de 4 anos. "Existem diferentes tamanhos de infinito?" atrai os de 8 e 9 anos. As fronteiras do nosso conhecimento são tão extensas e irregulares, acercando-se de nossas tarefas cotidianas aqui e recuando lá, que nunca queremos essas perguntas. A arte consiste em escolher uma pergunta que leve à resposta, estimulando invenções por parte do grupo. O líder pode precisar dar pistas aqui ou alertar sobre armadilhas lá, como um bom xerpa – mas ele ou ela sempre deixa os estudantes escalarem a montanha sozinhos.

E quanto a todas as dificuldades que você esperaria em qualquer empreendimento humano – o tímido, o agressivo, o desestimulado, o desatento, aqueles que se comportam como palhaços, ou escolhem um caminho solitário para as percepções que se esforçam em explicar? É uma civilização em miniatura que cresce atrás da fronteira e amadurece lentamente, à medida que seus integrantes cuidam uns dos outros. Então, não apenas a matemática, mas o modo de se relacionar – e o crescimento da "mente" que resulta da reunião de mentes – transforma cada pequeno círculo em um modelo da forma como a nossa espécie coloniza seus ganhos e os desenvolve irregularmente. Não temos manual de instruções para os nossos líderes. "Matemática é liberdade", disse o grande teórico de conjuntos russo Georg Cantor (1845-1918), e é no espírito dessa liberdade que as percepções e as provas se desenvolvem de forma imprevisível (KAPLAN; KAPLAN, 2007). É claro: isso é um ato realizado em corda bamba e sem rede de segurança, mas em seu lugar estão a boa vontade e um evolutivo bom senso da parte de todos. À medida que a matemática gradualmente se torna mais importante do que as idiossincrasias da personalidade, desenvolvem-se no grupo uma causa comum, uma identidade comum, uma forma comum de ser. Eles podem não saber que outros descobriram esses teoremas antes – e isso não importa. Estamos, cada um, construindo o mundo à nossa imagem, e essa imagem é, em um estágio, coletiva. Muitas discussões maravilhosas acontecem em um Círculo da Matemática, e uma delas ocorre entre cada indivíduo e o círculo – que, no final, foi reunido em um ponto e posteriormente será deixado em algum outro ponto, tendo se internalizado.

Qual é o mecanismo de tudo isso, a logística e os aspectos práticos? Não há nada que você deva tomar como foco, não mais do que você se preocupa em conseguir e gastar. O que importa é a Mente e seus aventureiros – o resto é economia doméstica. Freud certa vez falou sobre uma "esfera do ego livre de conflito". Como um líder do Círculo da Matemática, estudante, pai ou amigo, você quer estabelecer um *cordão sanitário* em torno de cada encontro, para que você e todos os outros possam ser cativados e

acompanhar o ponto onde a pergunta "dança". Em alguns Círculos da Matemática clandestinos que começaram na antiga União Soviética, um dos líderes ficava atrás de uma cortina, vigiando a rua à noite devido à possibilidade da temida chegada de um anônimo carro Zil preto – enquanto outro servia o samovar. Em um mito, um mundo, uma cultura distante, Rip van Winkle saiu para as montanhas para jogar bola com os anões e, tendo se perdido no tempo, retornou 23 anos depois à sua aldeia, que tinha aumentado.

O problema mais desafiador consiste em transformar uma pessoa de boa vontade em um líder confiante e inspirador. Essa pessoa precisa ser um mestre em matemática para começar isso? Não é ruim começar com esse ótimo mapa dobrado no bolso, assim como não é ruim levar seu cartão de crédito com você em uma caminhada: mas uma universidade que conhecemos costumava dar bolsas de estudo de via única – os recursos cobriam apenas a viagem de ida, você tinha de trabalhar para garantir o seu retorno. Conhecer matemática suficiente para levar você e sua coorte às montanhas é um plano muito bom – mas que aventura, ter de deduzir seu caminho de volta! Isso o torna dependente do domínio interno da intuição e alimenta a engenhosidade que carimba nossa espécie. E existe a possibilidade de você se deparar com um vale desconhecido, ou encontrar um local que ninguém tinha visto antes!

A paciência é uma virtude que exige cultivo. "Olhe só, isso é maravilhoso! Deixe-me mostrar a você!" Essa exclamação está presa na boca de todos os matemáticos. Antes de chegar aos lábios, ela precisa ser sutilmente modificada: "Hmmm, eu não sei... isso parece promissor? Sua ideia de cinco minutos atrás – ela funcionaria aqui?" É tão estimulante observar uma mente tentando resolver um problema complicado, virando-o de cabeça para baixo, puxando-o, definindo-o de forma clara e, finalmente, dividindo-o, como assistir a um esquilo descobrindo nozes enterradas em um banco de neve. Mais excitante, porque é muito menos previsível, pois toda a nossa herança comum, a variedade de nossas ferramentas e as incríveis formas de lidar com elas enchem o museu da experiência.

Como propor uma pergunta de forma que seja sedutora, diante da mais remota compreensão de seus estudantes? A um de nós, utilizando lições de esgrima, o mestre disse: "Segure o florete como se fosse um pássaro – firme o suficiente para que não escape, e não tão firme a ponto de danificá-lo". Um bom líder do Círculo da Matemática aprenderá a fineza de uma questão bem agarrada, fazendo com que pareça prestes a alçar voo a um toque de percepção – mas esse toque depende de um ou dois tremores. "Você pode formar um retângulo com tijolos quadrados que não sejam congruentes?"

Como você reúne uma dúzia de espíritos animados e selvagemente diferentes e os orienta em direção à descoberta do desenho de uma construção mais bela do que o Taj Mahal – mas invisível? Pois uma estrutura matemática é assim. Invocando o seu próprio arquiteto interno, que fazia perguntas aos 8 anos e inventava aos 10, intrigava-se, triunfava e saboreava a perspectiva de montes além de montes. O líder de um Círculo da Matemática se vale, em última análise, da convicção de que aquilo que começa com encantamento para cada um de nós, floresce com assombro.

Dizemos que as nossas vidas são impulsionadas pelo amor e pelo sentido, e seguimos os caminhos em que o sentido converge para a descoberta e a invenção da matemática. Porém, qual é o papel do amor nisso? Falamos dos nossos íntimos Círculos da Matemática como círculos de amigos e enfatizamos seu caráter conversacional, falando deles como os melhores jantares festivos. Afirmamos que a matemática é nosso direito de nascença, feito por e para todos nós, não apenas um mosteiro de gênios isolado. Em seu livro "The number sense" ("O sentido do número"), o renomado neurofisiologista francês Stanislas Dehaene escreve: "Estou convencido de que crianças com iguais capacidades iniciais podem se tornar [estudantes] excelentes ou casos perdidos em matemática, dependendo do seu amor ou ódio pela disciplina. *A paixão gera o talento*" (DEHAENE, 1999).

Bibliografia

DEHAENE, Stanislas. *The number sense*: how the mind creates mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1999.

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

Apaixonando-se pela matemática

Domniki Georgopoulou

"– O que você sabe sobre a teoria de Ramsey?
– Nada.
– Perfeito!"

Descobri que esse é um diálogo típico no início de uma sessão do Círculo da Matemática. Para minha surpresa, cada vez que o professor mencionava o nome obscuro e assustador de um novo e complexo problema matemático, os estudantes nem mesmo se intimidavam. Pelo contrário, eles se sentavam na ponta das cadeiras, ansiosamente antecipando a formulação do problema. Voltando à minha própria experiência escolar, lembro que, sempre que uma nova tarefa era anunciada, ela era recebida com um doloroso receio e suspiros de decepção. Nas primeiras vezes em que visitei o Círculo da Matemática, não consegui entender exatamente o que tornava os estudantes tão destemidos ao confrontar as profundezas desconhecidas da teoria de Ramsey, do *pequeno teorema* de Fermat ou da *função phi* de Euler. Mais do que isso, tive dificuldades em entender por que seu professor, Bob Kaplan, insistia em apresentar aos estudantes do ensino fundamental todos esses problemas que estavam muito além do nível da escola secundária, e ainda continuava esperando que eles respondessem, sem evitar o que é difícil e complicado até para os amantes da matemática mais avançada.

Não demorou muito para que eu percebesse que o senhor Kaplan e os outros professores do Círculo da Matemática estão envolvidos com algo que os docentes de matemática mais convencionais tendem a ignorar: que a matemática não é uma coisa assustadora que precisa ser cuidadosamente disfarçada como não assustadora, mas algo bonito que deveria ser revelado em sua totalidade, sem obscurecer nenhum dos seus fascínios. Em vez de fingir que a matemática é, de certa forma, simples e praticamente autoevidente, tentando desviar a atenção de sua imensa complexidade, o Círculo a confronta diretamente, permitindo aos estudantes descobrirem por si mesmos como o mundo da matemática é fascinante. Essa é a inovação real do Círculo da Matemática: tanto em seu ensino quanto nos conteúdos escolhidos, ele envolve a *exploração*. Em vez de tomar os estudantes pelas mãos ao longo de um caminho estreito e protegido, ele os apresenta à maravilhosa selva da matemática, estimulando-os a se perder em seu território desconhecido. A educação se torna uma aventura.

Entrei no Círculo da Matemática como parte de minha própria incursão em territórios desconhecidos. Como estudante do 4º ano de antropologia em Harvard, eu tinha decidido escrever minha tese sobre um mundo social completamente não familiar a mim, o mundo dos matemáticos. Sem ter praticado nada de matemática desde o ensino médio, eu estava completamente fora da minha zona de conforto. Embora gostasse de matemática – principalmente devido a uma série quase ininterrupta de professores excelentes –, eu havia decidido que a disciplina não me interessava. No entanto, eu me interessava pelos matemáticos e pela possibilidade de um antropólogo esquecido da matemática conseguir falar sobre o trabalho deles. Fui atraído a esse tema por uma fascinação não propriamente pela matemática, mas pela paixão que ela parecia inspirar – e eu estava curioso para ver se conseguiria entendê-la. Após uma breve troca de *e-mails* com o senhor Kaplan, ele me convidou para assistir à aula do seu Círculo da Matemática para estudantes do ensino fundamental. Embora isso estivesse um pouco fora do escopo da minha pesquisa, achei que seria uma experiência útil: ao ver como o interesse pela matemática é cultivado desde cedo, pude talvez encontrar aqui uma boa lente para examinar a profissão matemática.

Indo à sala de aula pela primeira vez, eu fiquei, no mínimo, desnorteado pela atmosfera. Kaplan pedia aos estudantes que tentassem decifrar a multiplicação. Eles estavam ruidosamente muito empolgados, gritando possíveis interpretações para o que acontece quando você multiplica um número por outro, interrompendo uns os outros e agitando as mãos no ar. Tendo retornado da Grécia, eu estava acostumado a uma sala de aula muito maior, onde tínhamos de pedir permissão para falar e passávamos a maior parte do tempo cuidadosamente anotando e copiando do quadro-negro. O estilo de ensino era totalmente estranho para mim. Por um momento, eu me perguntei se Kaplan chegaria a algum lugar com sua pergunta sobre multiplicação, ou se tudo acabaria em caos. Porém, momentos depois a turma irrompeu vitoriosa: os estudantes, com um empurrãozinho do professor, tinham concluído que a multiplicação era, por alguma razão, não apenas uma iteração da adição. A partir de um problema escolar básico, eles tinham, em poucos minutos, chegado ao ponto inicial da *teoria dos números*.

Esses estudantes do ensino fundamental passaram o resto do semestre explorando as profundezas e as amplitudes da teoria dos números, com o mesmo grau de entusiasmo que haviam mostrado na primeira aula. Todas as terças-feiras, Kaplan fazia uma pergunta sobre um tema desconhecido, apresentava um problema, traçava um teorema. Os estudantes imediatamente começavam a lançar sugestões sobre como deslocar os números, como arranjá-los de forma diferente, como olhar para eles de forma a fazer surgir uma prova. E, de forma invariável, sempre que eles finalmente

chegavam a uma resposta, resolviam o problema ou provavam o teorema. Kaplan não tinha medo de dizer a eles o quanto o problema com que eles estavam lidando era de fato difícil: independentemente de o problema ter confundido mentes astutas como a de Carl Friedrich Gauss (1777-1855) ou de ter sido solucionado há apenas cem anos, Kaplan queria que eles soubessem que o que estavam tentando resolver na infância tinha desafiado adultos com muito mais treinamento e tempo do que eles. Em vez de desanimados, eles estavam intrigados. Eles gritavam suas sugestões, e Kaplan, com zelo, escrevia-as no quadro-negro, ocasionalmente dando dicas. E tudo prosseguiu assim, até que, no fim da aula, eles chegaram ao momento de resolução do problema e tudo passou a fazer sentido em retrospecto.

Um dia, quando eu estava no ensino médio, por alguma razão, nosso professor de matemática começou a falar sobre *educação*. Perguntamos a ele como se sentia em relação ao sistema em vigor na época, e ele bufou de forma desdenhosa. Em sua visão, em vez de se preocupar com notas, as crianças deveriam brincar até os 18 anos. Como ele era um dos meus professores preferidos, essa visão estranha ficou na minha mente, embora na época eu não a entendesse totalmente. Observando os estudantes do Círculo da Matemática mergulharem em novos problemas impossíveis a cada semana com um entusiasmo invariável, acho que entendo o que meu professor queria dizer. Embora de início eu me sentisse hesitante diante do estilo de ensino extremamente livre de Kaplan, aos poucos entendi o que ele estava fazendo. Na verdade, aqueles estudantes estavam *brincando*. Diante de um mistério intrigante, eles brincavam com os números, inclinavam a cabeça para os lados para vê-los de um ângulo diferente e trabalhavam com os colegas para encontrar a solução mais rápida. Ao afastar a ameaça das provas e das notas, eles simplesmente se envolviam na busca. Em vez de lutar para lembrar de suas anotações ou do que o professor havia dito na aula anterior, eles utilizavam seus próprios recursos para confrontar o problema. E isso funcionava.

Não sou um especialista em educação. Não posso dizer qual abordagem de ensino é melhor para os estudantes em geral. No entanto, acho mesmo que existe um bom argumento em favor da abordagem do Círculo da Matemática, especificamente quando se trata de matemática. E isso porque *brincar* é realmente uma parte integral da matemática, em todos os níveis. Os matemáticos com quem falei muito frequentemente usavam o verbo *brincar* ao descrever seu processo de pesquisa. Como os estudantes do Círculo da Matemática, eles brincavam de diferentes formas para visualizar os problemas, arranjar seus componentes e colocá-los em diferentes contextos. Afinal, na pesquisa matemática, não há outra forma de abordar questões não respondidas: ao tentar chegar aonde ninguém chegou antes, você não consulta

um mapa. Os matemáticos elaboram mapas à medida que vão seguindo em frente, explorando todos os diferentes tipos de caminhos e possibilidades. Eles pegam uma forma, ou uma série de números, e tentam manipulá-las para, finalmente, chegar à solução do problema. O que os estudantes fazem no Círculo da Matemática não está muito distante do que os matemáticos descreveram. Embora no caso deles os problemas já tenham sido solucionados, Kaplan não lhes fornece o mapa. Eles têm de fazer, de forma colaborativa, o que os matemáticos que resolveram o problema pela primeira vez fizeram, além de brincar com os mesmos conceitos. Então, de certa forma, o Círculo da Matemática simula o trabalho de um matemático. Além de cultivar o pensamento independente em um ambiente sem estresse, o estilo do jogo matemático fornece aos estudantes uma boa noção de como é a pesquisa matemática real. Ele lhes mostra a alegria de chegarem a uma solução sozinhos, de descobrirem um caminho através da selva. Essa é a emoção da *exploração*. Ela mantém neles o mesmo nível de entusiasmo diante de cada problema complicado, semana após semana.

A matemática, é claro, é uma forma refinada de se ensinar lógica, e suas aplicações em todos os lugares são óbvias. Apesar disso, frequentemente eu me lembro de me perguntar por que estava aprendendo matemática. As respostas que recebi, com base em vários graus de sua utilidade ou de seu valor lógico, não me satisfaziam completamente. Eu sentia que a lógica não era uma área exclusiva da matemática e que ela podia ser ensinada de muitas outras formas, como por meio da linguagem e da gramática, por exemplo. Eu não conseguia deixar de pensar que a utilidade da matemática para a maioria das pessoas acaba com o que aprendemos nas primeiras séries do ensino fundamental – saber o que significa *seno* é, a rigor, supérfluo para a minha vida diária. Descobri que minha educação secundária sofria de uma falta de justificativa. Meus professores tentavam me convencer de que o que eu estava aprendendo me ajudaria de uma forma clara e concreta, e eu tive dificuldades em acreditar neles. O Círculo da Matemática adota uma abordagem totalmente diferente. Sem fazer discursos sobre como a matemática é boa para os estudantes, Kaplan centra foco no próprio material. Em vez de dizer a eles que a matemática é um uso produtivo do seu tempo, ele lhes mostra o que a matemática realmente é: bonita, complicada, surpreendente e fascinante. Ele lhes mostra a emoção da exploração. No Círculo da Matemática, os estudantes praticam a matemática por si só.

Além disso, da forma mais maravilhosa, os estudantes reagem. Em vez de se preocuparem apenas com a solução dos problemas, eles prestam atenção ao *processo*. Eles desenvolvem uma incrível *sensibilidade estética* para a matemática. A partir de coisas aparentemente superficiais, como o arranjo de números no quadro-negro ou a

apreciação imediata de uma bela prova, eles exibem uma impressionante compreensão da *estética matemática*. O Círculo da Matemática lhes permite apreciar a matemática por si só, surpreender-se e maravilhar-se com sua beleza. Eles têm permissão para mergulhar em uma prova, avaliando como ela é inesperada e engenhosa, sem terem de considerar imediatamente sua utilidade ou seu aspecto prático. E isso é precisamente a *emoção* da exploração por si só: a emoção que motiva tanto os estudantes do Círculo quanto os matemáticos pesquisadores. Quando perguntei aos professores de matemática universitários o que os motivava a praticar a matemática profissionalmente, quase todos responderam que a matemática tem naturalmente uma beleza e um sentido de aventura que os mantêm envolvidos, ano após ano. Novamente, o Círculo da Matemática é bem-sucedido em captar um lado real da profissão matemática e permitir que os estudantes apreciem a matemática pelo que ela é.

Talvez este seja o sentido verdadeiro do que o meu professor de matemática disse: brincar é, de certa forma, fazer algo por seu próprio valor, independentemente de sua utilidade. O Círculo ensina aos estudantes que a matemática pode ser divertida, de forma que faz justiça à própria matemática. Se questionarmos o valor educativo do que se ensina lá, realmente não é muito, no sentido prático. Nenhum não matemático precisa realmente conhecer a teoria dos números e, se alguém precisa aprender análise, pode tentar na faculdade, como todas as outras pessoas. O valor educacional do Círculo da Matemática está em mostrar aos estudantes que eles podem apreciar a matemática por si só. Acho que essa é uma lição preciosa quando se trata de matemática e que também pode ser aplicada à vida em geral. A educação parece estar totalmente absorvida em tornar as coisas úteis, esquecendo-se de reservar tempo para a apreciação real e pura. Em vez de terem de cultivar isso por conta própria, o Círculo da Matemática confere aos estudantes uma oportunidade de desenvolver essa faculdade juntos e com a orientação de professores experientes e entusiasmados.

O Círculo da Matemática realiza alguns contrapontos muito ousados em relação às práticas tradicionais de educação. No entanto, suas proposições radicais geram algumas preocupações. Seu estilo de ensino participativo reduz o tamanho máximo das turmas. O Círculo não poderia acontecer com mais do que 12 estudantes. Se sua missão é, como a senhora Kaplan declara, "conquistar o mundo", as escolas deverão se ajustar a essa condição. Outra questão é que o Círculo da Matemática talvez não seja inteiramente apropriado para todos os tipos de personalidade. Sua atmosfera fortemente interativa não é exatamente ideal para estudantes mais quietos e introvertidos, que se sentem menos inclinados a se manifestar em aula. Isso, porém, não significa que eles não estejam aprendendo e absorvendo o que é ensinado.

No entanto, como o modelo de ensino do Círculo é fortemente fundamentado na participação dos estudantes, estes não têm a experiência integral do Círculo da Matemática. Essas preocupações são muito sérias e podem apresentar obstáculos à disseminação do método de ensino do Círculo. Apesar disso, elas não devem ofuscar os consideráveis méritos de sua inovação. Em um momento em que a educação matemática passou a ser dirigida por testes, padronizados ou não, o Círculo da Matemática proporciona uma alternativa revigorante, oferecendo o conhecimento por si só. Os professores recuam, deixando que a matemática se explique e revele sua incrível beleza por meio da própria exploração dos estudantes. Essa ideia é um pensamento incrivelmente inovador. O modelo do Círculo merece, no mínimo, uma consideração séria. Pessoalmente, eu ficaria muito feliz em ver seu espírito aplicado às aulas de matemática em todo o mundo, apresentando uma era em que a matemática nos ensinos primário e secundário privilegia verdadeiramente a exploração.

Enquanto era concluída a auditoria de um ano do Círculo da Matemática do senhor Kaplan, eu terminava o meu ciclo de tese. Ao escrever sobre o que os matemáticos tinham me dito sobre sua profissão, falei não apenas com professores de matemática universitários, mas com professores de escolas, como o senhor Kaplan, pesquisadores do ensino de matemática e estudantes de todos os níveis. Fiquei admirado com a incrível variedade de experiências que os matemáticos podem oferecer. Da educação primária ao doutorado, do ensino à pesquisa, da devoção do amador à do profissional, a matemática oferece alegria para muitas pessoas diferentes, de muitas formas diferentes. No entanto, um tema comum com o qual eu me deparei, em todas essas experiências, foi o senso de aventura que a matemática oferece de forma tão abundante. Os amantes da matemática buscam-na pela beleza da busca e pelos resultados inesperados que encontram no caminho. Isso é o que inspira o amor pela matemática. Apresentar esse senso de aventura o mais cedo possível no ensino de matemática é, possivelmente, o melhor caminho a seguir, se desejamos que os estudantes amem a matemática. O Círculo da Matemática faz isso de forma eficiente, tanto em seu estilo particular de ensino, que incentiva a exploração pessoal, quanto em sua ideologia matemática, que traz à linha de frente o que é belo e deixa para trás as considerações de aplicabilidade e praticabilidade. O Círculo cultiva jovens amantes da matemática. No processo, também cultiva pensadores complexos e criativos, com entusiasmo pelo conhecimento puro. Ele faz justiça a matemáticos e estudantes. Não tem sentido fazer especulações, mas, considerando todas as coisas, eu diria que a perspectiva do Círculo da Matemática tem um potencial real para conquistar o mundo.

Bibliografia

KAPLAN, R. *The nothing that is*: a natural history of zero. Oxford: Oxford University Press, 1999.

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *The art of the infinite*: the pleasures of mathematics. USA: Bloomsbury Publishing, 2014.

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

A alegria da aprendizagem participativa: o Círculo da Matemática

Peter Flom

E se as crianças adorassem aprender?

E se, no fim da aula, elas quisessem ficar mais e segurassem o(a) professor(a) no corredor, fazendo perguntas?

E se elas descobrissem que aliar a imaginação a suas capacidades de raciocínio lhes daria uma ferramenta de extraordinário poder para explorarem o cosmos?

E se um menino de 11 anos ficasse tão empolgado com suas percepções a ponto de gritar: "Uau! Agora eu entendo isso!"

E se tudo isso acontecesse na *aula de matemática*?

Suponhamos que você quisesse aprender a tocar piano e, na primeira aula, tudo o que tivesse conseguido fosse bater repetidamente no dó intermediário e, quando perguntasse à professora o que iria acontecer, ela lhe dissesse que, nos primeiros meses, você aprenderia uma nota por semana, depois passaria dez anos tocando escalas e, depois disso, talvez uma música?

Você voltaria? E se alguém *fizesse* você voltar, você aprenderia a amar música? Se, após cinco anos nesse trabalho penoso, alguém lhe dissesse que você, tocando piano, deu-lhe alegria e satisfação intensas e foi uma poderosa válvula de escape para sua criatividade e espontaneidade – você acreditaria nessa pessoa? Ou você a consideraria louca?

Suponhamos que você fosse a um professor diferente e, na primeira aula, você sequer chegasse a tocar piano, mas simplesmente assistisse a um vídeo sobre os dedos dos grandes pianistas. Suponhamos ainda que o currículo exigisse fazer isso por uma década ou duas antes de sentar e tocar. Você aprenderia a tocar?

É uma noite de terça-feira em Cambridge, Massachusetts. As crianças de 5 anos tentam descobrir a área de um círculo – uma delas está fazendo isso sentando-se no colo da mãe e, ocasionalmente, chupando o polegar. As crianças de 7 anos estão explorando bases diferentes. As de 9 anos estão fazendo teoria de grupo. As maiores, de 11 anos, estão provando o teorema de Bolyai-Gerwien: se dois polígonos têm a mesma área, um

deles pode ser cortado em um número finito de cortes retos, e essas peças podem ser rearranjadas para formar o outro polígono. Ninguém está fazendo exercícios exaustivos, ninguém está entediado e ninguém está sendo humilhado por respostas erradas ou por palpites ruins. Isso é uma aula de matemática, mas Bob e Ellen estão ensinando. E é diferente de qualquer coisa que eu já vi antes.

Quem ensina área para crianças que não sabem multiplicar? Quem acha que você pode ensinar bases para estudantes da 2ª série? Quem acha que as crianças que provam com sucesso o teorema de Bolyai-Gerwien deveriam passar para um dos problemas de Hilbert? Quem acha que estudantes de 11 anos podem ser guiados através dos grandes teoremas da matemática?

O mesmo tipo de pessoa que sabe que você pode cantar antes de aprender uma escala – ou mesmo antes de aprender o que é a nota dó intermediária. O tipo de pessoa que sabe que matemática não é apenas multiplicação e divisão, ou diferenciação e integração, mas uma das criações mais belas e interessantes da mente humana. O tipo de pessoa que sabe que, assim que você consegue atrair o interesse de uma criança, deve sair do caminho, pois eles se movimentam rápido.

Muitas pessoas odeiam matemática. E quase ninguém aplica matemática apenas por diversão. Após um dia de trabalho duro, essas pessoas relaxam tentando provar um teorema de uma nova forma, ou brincam com a conjetura de Goldbach? Não, provavelmente não. E se você for uma das poucas pessoas que fazem esse tipo de coisa, provavelmente ficará quieto, para que seus amigos não pensem que você é louco. Se você toca piano por diversão, pode contar aos seus amigos... eles poderão sentir inveja de você – ou não – ou admirá-lo – ou não –, mas não pensarão que você é louco, mesmo que eles não gostem de música. Se você disser a eles que acha a música de Bach bonita, eles poderão discordar, mas não vão olhar para você com estranheza e balançar a cabeça. E é assim que acontece, mesmo que eles saibam que você jamais fará um recital, muito menos tocará no Carnegie Hall.

Se você joga em uma liga de basquete após o trabalho, ninguém espera que você seja o Michael Jordan. E se você está orgulhoso de si mesmo por jogar melhor do que o habitual, ninguém diz: "Por que fazer isso? Isso é para profissionais!"

Por que essa diferença? E o que podemos fazer em relação a isso? Bob e Ellen Kaplan têm algumas respostas, e essas respostas vão além da matemática. Elas envolvem raciocínio, aprendizagem, alegria e, em um sentido real, ser humano. Eles chamam seu grupo de *The Math Circle* (o Círculo da Matemática).

Eles recebem qualquer criança que chega, mas nem todas gostam de matemática no início. Algumas vêm porque têm um amigo na turma – e, então, Bob e Ellen acendem a fogueira do interesse; falando com os dois, acho que eles praticamente preferem aceitar *apenas* crianças que pensam odiar matemática. Embora exista uma autosseleção entre as crianças que ensinam em Cambridge, eles deram aulas semelhantes em escolas públicas em outros países e, agora, as pessoas estão usando métodos semelhantes em prisões e no Brasil.

Bob e Ellen não criaram a ideia do Círculo da Matemática. Coisas semelhantes são realizadas há muito tempo na Rússia e, nos Estados Unidos, coisas semelhantes foram realizadas por Robert Lee Moore há cerca de cem anos. Porém, Moore era um tipo combativo, competitivo, e sua agressividade afastou muitas pessoas. Os Kaplan aliaram algumas das ideias de Moore a uma total ausência de competitividade e a uma sensibilidade liberal em relação às crianças. No entanto, a ideia essencial no método de Moore – e no dos Kaplan – é a de que as pessoas aprendem fazendo, seja piano ou matemática, e que esse tipo de aprendizagem pode levar alegria a elas, mesmo que nunca cheguem a tocar piano no Carnegie Hall ou a ganhar uma Medalha Fields.

Eles fazem isso há 21 anos. Neste ano, eles têm mais de cem estudantes e agora, no verão, treinam outros para seguirem seus métodos. Eles já abriram mais de 500 Círculos da Matemática no Brasil. Eles detalham como e por que fizeram isso no livro "Out of the labyrinth: setting mathematics free" ("Fora do labirinto: libertando a matemática", em tradução livre).

Parte do que eles fazem, é claro, depende de sua personalidade, mas parte – uma boa parte – é transferível. Bob e Ellen tiveram sucesso em treinar pessoas para fazerem o que eles fazem. Eles treinaram pessoas que já são professores de matemática, para que elas saibam o suficiente para ensinar dessa forma, assim como treinaram estudantes de pós-graduação em matemática sobre a maneira como as crianças pensam, para que possam ensinar dessa maneira. Muitas pessoas que adoram matemática querem compartilhar esse amor e disseminam a ideia de que a matemática não é uma disciplina entediante e árida – algumas dessas pessoas podem aprender a fazer isso.

Alguns de vocês podem dizer que a ideia de tocar escalas por dez anos é uma loucura. É claro que ninguém insiste na ideia de que um músico pratique escalas por dez anos! É justamente essa a questão. Nós *realmente* insistimos nisso, ou em seu equivalente na matemática. O que os músicos fazem? Eles tocam música. O que os compositores fazem? Eles compõem música. O que os matemáticos fazem? Eles descobrem e provam

teoremas. Eles "tocam" matemática. Porém, muitos estudantes de matemática não chegam a fazer nada disso até entrar na universidade. Eles podem enxergar uma prova, especialmente em geometria. É como assistir a Vladimir Horowitz tocando piano. Isso não é ruim, mas ninguém jamais aprendeu a tocar piano apenas assistindo. Você aprende a tocar piano tocando – e, no início, você toca mal. Quando uma criança de 5 anos arrisca – como uma criança fez enquanto eu assistia – que 9 x 9 = 25, porque 25 é "grande", ela está fazendo o que um estudante de piano do primeiro ano faz quando "maltrata" uma peça musical básica. Ambos irão melhorar praticando, especialmente se essa prática for orientada por um professor.

Como podemos mudar o ensino de matemática? Bem, quando o problema 9 x 9 surgiu na aula, um dos estudantes de 5 anos de idade disse: "Vamos descobrir!"

Bibliografia

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

O coração do Círculo

Drew Sutherland

Existem algumas atividades das quais um adolescente ou pré-adolescente participará voluntariamente por três horas nas manhãs de domingo, começando às 9h, mas, para o nosso filho Skylar, o Círculo da Matemática valeu por muitos anos.

Para dizer a verdade, Skylar sempre teve afinidade com a matemática e gosta de trabalhar com problemas intrigantes. No entanto, como um estudante educado em casa, não lhe faltavam materiais interessantes e desafiantes durante o resto da semana. Pelo contrário, ele fazia aulas *online* por meio do *Education Program for Gifted Youth* (EPGY) de Stanford e, depois, na Escola de Extensão de Harvard. Então, ele não era apenas desafiado, mas também estava ocupado com conjuntos de problemas a concluir e exames para os quais se preparar. O Círculo da Matemática é uma atividade que ele conseguiu desenvolver porque gostava. De fato, agora como um estudante calouro do *Massachusetts Institute of Technology* (MIT), é uma das poucas coisas de sua vida pré-universitária das quais ele sente falta.

Quando eu tento explicar a outros pais do que se trata o Círculo da Matemática, às vezes tenho dificuldades de ir além de suas ideias preconcebidas sobre como deve ser um programa de matemática extracurricular. Eles querem saber se é um currículo alternativo àquele utilizado na maioria das salas de aula norte-americanas, como a matemática de Singapura ou da Rússia. Às vezes, eles presumem que isso proporciona o estudo com tutores. Outras pessoas visualizam estudantes envolvidos em matemática competitiva, como as competições *MathCounts* que agora são transmitidas pela ESPN ou os concursos *Math Olympiad*. Pacientemente, eu explico que o Círculo da Matemática não é nada disso.

Como o nome implica, o Círculo da Matemática é uma atividade cooperativa e colaborativa. Aos participantes, é apresentado um problema interessante e complicado e, com o uso de suas próprias ideias, eles buscam uma solução. Ao longo do caminho, eles podem precisar definir novos conceitos, inventar uma nova terminologia e criar novos algoritmos. O processo pode exigir semanas ou até meses de esforço, revisões múltiplas

e muita tentativa e erro, mas isso é uma parte essencial do processo. De fato, em geral, é cometendo erros e reconhecendo-os como tais que ocorre o verdadeiro progresso. Sobretudo, é um grupo de esforço, no qual as ideias de todos os participantes são bem-vindas. Há um adulto facilitador presente para, gentilmente, conduzir as crianças em uma direção produtiva se elas demonstrarem dificuldades, estimular aqueles que se sintam tímidos, propor perguntas que deveriam ser consideradas e, em geral, manter o grupo dentro do seu caminho – porém, o adulto não é o foco. O grupo é um *círculo*, não uma hierarquia, e as dinâmicas são *cooperativas*, não competitivas. Embora o facilitador possa fornecer o trampolim inicial para a investigação, a direção que ela toma e as ferramentas desenvolvidas para solucioná-la cabem aos participantes. O Círculo da Matemática oferece às crianças a oportunidade de assumir a posse do seu aprendizado de uma forma que raramente encontram em outras aulas e atividades. É algo que fornece um poder incrível.

Como pais e cidadãos, frequentemente somos exortados a preparar nossas crianças para "competirem" no mercado global do século XXI. A partir dessa perspectiva, o Círculo poderia não parecer a forma mais produtiva de gastar nosso tempo e dinheiro limitados, preparando nossas crianças para o futuro, se comparada a várias outras atividades extracurriculares disponíveis para nós – e, vivendo em Cambridge, Massachusetts, como vivemos, há inúmeras para se escolher. Apesar disso, de todas as oportunidades disponíveis, o Círculo da Matemática foi a mais útil para ensinar a Skylar no que realmente consiste ser um matemático. Independentemente de ele escolher ou não essa carreira, foi uma experiência valiosa que será útil para ele, seja qual for o seu caminho a seguir, e é uma experiência difícil de se encontrar em outro lugar.

Em meu próprio trabalho diário como matemático, passei tempo lendo a literatura e trabalhando em problemas, como um estudante na escola, mas também passei muito tempo – e, não apenas casualmente, muitas vezes meu tempo mais produtivo – envolvido em discussões matemáticas que são incrivelmente semelhantes ao que ocorre em uma reunião do Círculo. Vou a conferências e organizo encontros com colegas – pessoalmente, se possível, e *online* quando necessário –, para que eu possa experimentar a sinergia produzida por um grupo de pares interessados e qualificados que trabalham juntos para resolver um problema.

Embora às vezes eu escreva artigos de pesquisa sozinho, a maior parte do meu trabalho é realizada com coautores, e isso é típico da maioria dos matemáticos atualmente. A noção romantizada do matemático como um gênio recluso trabalhando de forma isolada é, em grande parte, um mito, e ser competitivo no século XXI significa não

apenas ter conhecimento e ser competente, mas também ser capaz de trabalhar produtivamente com outros para resolver problemas. Esse é o coração do Círculo da Matemática.

Além de sua natureza colaborativa, o Círculo reflete o mundo dos matemáticos profissionais em sua estrutura inventiva e exploratória. Muitas pessoas – incluindo estudantes e, particularmente, seus pais – tendem a ver a matemática como uma série de fórmulas e algoritmos a ser memorizada. A parte difícil da matemática para muitos estudantes dos ensinos fundamental e médio consiste simplesmente em saber qual algoritmo ou fórmula usar para um problema particular. No entanto, nas fronteiras da matemática, não existem livros didáticos nem existem regras que, se forem cuidadosamente seguidas, produzirão respostas. Não há necessariamente nem mesmo questões coerentes. Com frequência, nós não sabemos o que não sabemos, e descobrir a pergunta certa a fazer geralmente é o passo mais crucial. E, assim que uma pergunta foi feita e uma solução foi proposta, quem determina sua relevância, sua validade e sua completude? Quem dá nome a ideias que nunca foram pensadas antes? É a comunidade viva e vigorosa de matemáticos que, no final, define o que é matemática.

No coração de toda a matemática, e do que a distingue de todos os outros campos, está a noção de *prova*. Qualquer pessoa que tenha frequentado um curso de geometria euclidiana viu pelo menos um tipo de prova. Recebe-se um conjunto de axiomas e um conjunto de regras que permitem derivar consequências desses axiomas. Com esse tipo de abordagem, uma prova é uma sequência de passos, com cada um deles sendo um axioma ou a aplicação de uma regra a um passo anterior. No entanto, na matemática profissional como é praticada na atualidade, você virtualmente nunca verá uma prova desse tipo. Isso não significa dizer que as nossas provas não são rigorosas. Pelo contrário, o padrão de rigor atual é muito maior do que era no passado. Muitos argumentos que foram aceitos sem questionamento no século XIX não são mais vistos como provas, conforme os padrões atuais.

O que não é entendido amplamente fora do nosso campo é o fato de uma prova matemática ser, em última análise, um *construto social*. Uma prova é simplesmente um argumento matemático capaz de convencer outros matemáticos – suficientemente qualificados – sobre a verdade de uma alegação particular. Por essa definição, uma prova nunca existe isoladamente. Você não pode dizer que provou alguma coisa, até que outro matemático tenha lido e entendido a sua prova e concorde que ela está correta. Isso é algo que com que os aspirantes a matemáticos podem ter dificuldade de começar a lidar, mas é exatamente como funciona o Círculo da Matemática.

Eu creio que dois acontecimentos recentes em meu próprio campo da teoria dos números destacam essa questão: um é a celebrada prova de uma versão fraca da *conjetura dos números primos gêmeos* de Yitang Zhang, agora tema de um importante filme[1], e o outro é a alegada prova do que se conhece como a *conjetura ABC* de Shinichi Mochizuki, que, como escrevi em maio de 2015, permanece no "limbo matemático". Esses dois acontecimentos são desafiadores em suas similaridades e em suas diferenças. Ambos começaram como anúncios de revoluções importantes por matemáticos individuais que trabalham em grande parte no isolamento, que alegaram ter resolvido problemas famosos e abertos havia muito tempo na teoria dos números, e ambos ocorreram por volta da mesma época, em 2012 e 2013.

Porém, a partir daí, as histórias divergem de forma dramática, pois você poderia concluir que, se está lendo isso, é razoavelmente provável que tenha ouvido o nome de Zhang antes, mas, a menos que você seja um matemático – ou mesmo um teórico dos números –, provavelmente não tem ideia de quem é Mochizuki.

A conjetura dos primos gêmeos afirma que existem infinitamente muitos pares de números primos da forma (p, p + 2), onde *p* e *p + 2* são ambos números primos: números inteiros maiores que 1 e que não têm fatores apropriados. Os primeiros três pares de primos gêmeos são (3, 5), (5, 7) e (11, 13).

Há muito tempo se sabe que existem infinitamente muitos números primos, mas eles se tornam cada vez mais raros à medida que olhamos para números cada vez maiores. Assim, não é algo óbvio se devem existir ou não infinitamente muitos pares de números primos gêmeos, mas há muito tempo se conjeturou que isso ocorre de fato. Se essa conjetura é verdadeira ou não, ainda não se sabe, mas Yitang Zhang deu um passo importante nessa direção, ao provar que existem infinitamente muitos pares de primos da forma (p, p + c) para alguma constante *c* menor do que 70.000.000 (70 milhões); como uma consequência do trabalho subsequente discutido abaixo, agora sabemos que é possível usar $c \leq 246$.

O anúncio de Zhang foi bem espantoso, pois muitos matemáticos tinham trabalhado nesse problema no passado sem nada parecido com o sucesso dele, mas oito semanas se passaram até os matemáticos de todo o mundo se convencerem de sua prova e, em apenas um mês, seu artigo foi publicado no periódico "Annals of Mathematics", um evento virtualmente sem precedentes – tipicamente, leva pelo menos um ano para um

1 Bem, "importante" dentro da comunidade matemática; o filme é "Counting from Infinity" ("Contando a partir do infinito", em tradução livre) e foi exibido no último evento *Joint Mathematics Meetings*. Incentivo o leitor a assisti-lo, se tiver oportunidade.

artigo ser publicado nos "Annals". A prova de Zhang foi rapidamente aceita na área, de forma que tornou fácil para os outros matemáticos entenderem, embora ela de fato contenha algumas ideias verdadeiramente novas e criativas.

Outra razão pela qual o trabalho de Zhang teve tanta repercussão é que ele, implicitamente, convidou outros matemáticos a ajudarem a refinar seus resultados. Quando divulgou seu artigo, ele sabia que o limite de 70 milhões estava longe de ser o melhor possível, mas também sabia que poderiam ser necessários muito tempo e muito esforço para obter um limite ideal. Assim, provavelmente outra pessoa surgiria e encontraria uma forma de melhorá-lo.

Pouco tempo depois do surgimento do artigo de Zhang, foi lançado um esforço colaborativo de grande escala para refinar o seu limite, sob a égide de um projeto *Polymath*. Os projetos *Polymath* são colaborações *online* massivas com as quais qualquer um pode contribuir. O projeto *Polymath* para refinar o limite de Zhang foi o oitavo da série e um dos mais bem-sucedidos até hoje.

Os participantes incluíam matemáticos de países de todo o mundo, incluindo eu próprio, e também vários não matemáticos: pelo menos um biólogo e alguns cientistas de computação realizaram contribuições significativas. Foi preciso menos de um mês para reduzir o limite de Zhang de 70 milhões para 4.680 e, com a ajuda de um novo feito revolucionário de James Maynard e Terence Tao, subsequentemente fomos capazes de reduzir o limite para 246. Tanto Maynard quanto Tao foram participantes ativos no Projeto *Polymath* (KENNARD, 2015). De fato, Tao, vencedor dos prêmios *Fields Medal* e *Breakthrough Prize* em matemática, foi o nosso líder não oficial de projeto (TAO, 2016). De muitas formas, ele atuou como o facilitador do nosso "círculo da matemática *online*", que literalmente se espalhou pelo mundo.

Em contraste, a alegada prova de Mochizuki da *conjetura ABC* – que eu não tentarei explicar aqui – continua polêmica. Mochizuki é um matemático conhecido e muito respeitado, muito mais do que Zhang antes de suas revolucionárias lacunas dos números primos, mas sua prova é apresentada no contexto de um vasto arcabouço teórico de construção própria (PITICI, 2017).

De acordo com os próprios cálculos de Mochizuki, existem muito poucos matemáticos – talvez apenas três, entre os quais um de seus estudantes – que entendem esse arcabouço suficientemente bem para ter uma opinião qualificada sobre a correção da prova proposta por ele. Está claro que a comunidade matemática como um todo não está preparada para aceitar seus resultados, até que eles tenham sido digeridos e

compreendidos por um público mais amplo. Com base em seu mais recente relatório de *status*, o próprio Mochizuki parece se dar conta de que a única forma de sua prova se tornar amplamente aceita consiste em construir um "círculo" de matemáticos que entendem a prova e o arcabouço por trás dela. Isso exigirá tempo e esforço e, até então, a maioria dos matemáticos continuará a considerar a *conjetura ABC* como ainda não comprovada (KENNARD, 2915).

A moral dessa história é que a matemática não é uma entidade abstrata, que existe fora do domínio do discurso humano. Ela é um corpo evolutivo de conhecimento, que vive nas mentes das pessoas que a praticam. É o intercâmbio de ideias realizado pelos matemáticos que dá vida à matemática, conferindo-lhe formato e forma. Para mim, isso é o que reside no coração do Círculo da Matemática. E sinto muito orgulho por nosso filho Skylar ter tido a oportunidade de vivenciar isso na prática.

Bibliografia

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

KENNARD, F. *Unsolved problems in mathematics*. Lulu.com, 2015.

PITICI, Mircea. *The best writing on mathematics 2016*. New Jersey: Princeton University Press, 2017.

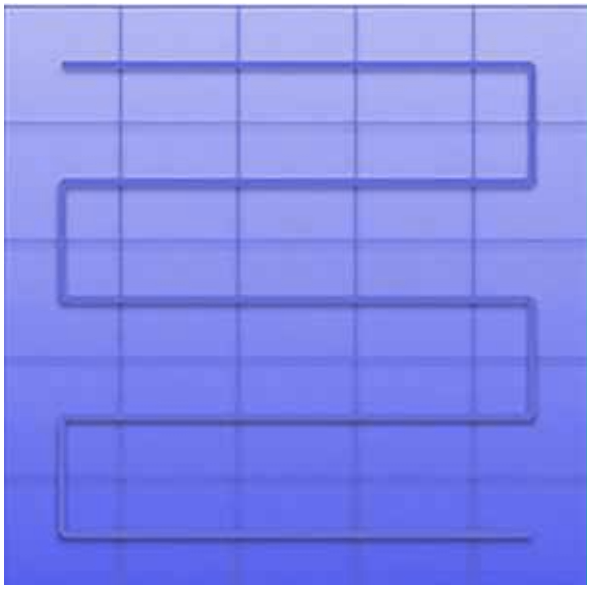
TAO, Terence. *Analysis I*. 3.ed. London: Springer, 2016.

O Círculo da Matemática: uma ideia revolucionária

Stephen F. Kennedy

Laura, de 7 anos, não consegue alcançar a parte do quadro-negro onde quer desenhar, então, salta para cima e para baixo continuamente: dá um pulinho para cima e desenha um pedaço, desce e salta de novo. Enquanto isso, três colegas de pé ao seu redor dão conselhos, corrigem e debatem as escolhas dela – todos falando simultaneamente. Ao mesmo tempo, outras nove crianças de 7 anos trabalham de forma animada no mesmo problema, sozinhas ou em duplas, em outras partes do quadro-negro. Os estudantes estão aqui, praticando matemática, como parte da demonstração das ideias pedagógicas de Robert e Ellen Kaplan, criadores do Círculo da Matemática. Tenho mais de 30 anos de experiência no ensino de matemática e nunca em minha vida vi uma sala de aula tão alegre, entusiasmada e produtiva, intelectual e pedagogicamente.

Estou no Rio de Janeiro, observando o treinamento de 66 educadores contratados pelo Círculo da Matemática do Brasil. Um grupo de estudantes do 2º ano de uma escola das proximidades foi trazido para a demonstração. Bob e Ellen pedem a eles para que desenhem um caminho através de uma grade de quadrados que começa em um quadrado do canto, passa de um quadrado ao seguinte entrando em um quadrado adjacente – em qualquer direção, para cima, para baixo, para a esquerda ou para a direita, desde que os dois compartilhem um lado – e visita cada quadrado da grade apenas uma única vez. Isso não é difícil: a maioria dos estudantes serpenteia de um lado para outro "bustrofedonicamente". Bob pergunta sobre quadrados iniciais e incentiva os estudantes a guiá-lo até uma solução na grande grade que ele desenhou no quadro-negro, começando pelo quadrado do centro. Enquanto isso, Ellen desenha várias grades menores de 5 x 5 quadrados na parte inferior do quadro-negro. Bob estimula os estudantes a irem para outros lugares iniciais possíveis e, finalmente, obtém a sugestão pela qual estava esperando – um quadrado próximo de outro quadrado do canto. Novamente, ele pede a ajuda das crianças. Porém, desta vez, elas cortam e deixam um quadrado não visitado e não visitável. Bob apaga e começa de novo. Novamente, elas o conduzem a um beco sem saída. Na terceira tentativa, cada criança está gritando conselhos e direções para Bob e, quando ele fica



encurralado pela terceira vez, elas já não aguentam mais. Primeiro uma, depois todas as 13 invadem o quadro-negro e pegam o giz. Laura toma o giz da mão de Bob e tenta trabalhar na grade que o professor desenhou em uma altura conveniente para ele.

Não vou ser um desmancha-prazeres e contar a resolução do problema dos Kaplan – inventado por James Tanton, enquanto olhava para o teto de sua casa, aos 9 anos de idade). Vou estimulá-lo a desenhar uma grade de 5 x 5 sozinho e tentar. Se ficar frustrado, você encontrará uma série de dicas no *site* www.themathcircle.org. Em vez disso, eu gostaria de chamar sua atenção para o fato de que as crianças estavam tão ansiosas para solucionar um problema matemático que quase atropelaram Bob e Ellen em sua ânsia de alcançar o quadro-negro. Isso, como talvez você perceba, é um comportamento incomum em uma sala de aula de matemática. Criar esse tipo de necessidade de saber é a característica que define, o espírito que anima a abordagem dos Kaplan. Ellen diz: "É a técnica clássica da sedução intelectual. Perseguimos mistérios atraentes diante deles". Bob diz: "Quando uma criança de 4 anos toma o giz da sua mão e diz 'deixe que eu mostro para você', é uma das sensações mais maravilhosas, e você sabe que cativou a criança para a matemática".

Uma ideia revolucionária

Bob e Ellen pregam uma ideia revolucionária: *todo mundo pode criar matemática*. Não apenas entender matemática, não apenas praticar algoritmos matemáticos, mas *criar* ideias e conceitos matemáticos. Essa é uma função necessária e essencial da mente humana, argumentam eles. Sua mente existe para que você possa navegar e funcionar no mundo, esse mundo lhe apresenta os desafios matemáticos, e sua mente desenvolveu estruturas para lidar com esses desafios. Por exemplo, suponhamos que Amy, Beth e Charlie queiram dividir um grupo de 13 filhotes de cães entre eles. Bob e Ellen perguntariam a Amy, Beth e Charlie o que fazer e, então, sairiam de cena. É certo que eles acabarão descobrindo que cada criança deve ficar com quatro cãezinhos e que sobrará um. Eles terão descoberto a divisão com restos. Se você quiser que eles

descubram as frações – ou pelo menos os terços –, substitua os cãezinhos por barras de chocolate ou alguma coisa desejável que não perca seu valor após a subdivisão, como acontece com um cãozinho. Ao final, com os mistérios emoldurados apropriadamente, suponhamos que nós quiséssemos dividir 1 milhão de barras de chocolate entre os 300 estudantes desta escola. Você poderia levá-los a criar o algoritmo da divisão longa que aprendeu dolorosamente na escola.

Quase ninguém precisa aplicar o algoritmo da divisão longa atualmente ou, aliás, quase nenhuma parte do currículo escolar de matemática. Quase todo mundo tem acesso a um dispositivo que desenvolve esses algoritmos de forma mais rápida e mais precisa do que qualquer humano jamais conseguiria. Você provavelmente está carregando um desses dispositivos consigo; você, muito provavelmente, está lendo este artigo em um deles. Apesar disso, nós insistimos em tentar – e em grande parte fracassando – ensinar esses algoritmos aos estudantes. É apropriado questionar por que nos preocupamos com isso.

Se você perguntar a um professor de matemática por que ninguém precisa aprender a matemática escolar, ouvirá uma ou mais das três razões seguintes. Em primeiro lugar, a matemática escolar desenvolve o senso numérico e geométrico e a intuição; essas habilidades são essenciais para o funcionamento no mundo e no ambiente de mercado. Isso é claramente falso nos dois lados do ponto-e-vírgula: a maioria das pessoas não desenvolve a sensibilidade ou o senso matemáticos na escola e, ainda assim, elas conseguem funcionar. Em segundo lugar, a matemática escolar inculca hábitos mentais desejáveis, como a facilidade no raciocínio lógico, a precisão do pensamento e a dependência de provas na argumentação. A falta de raciocínio lógico, de precisão do pensamento e de dependência de provas em nosso discurso cívico é tão evidente que torna ridícula essa alegação. Finalmente, como uma sociedade cada vez mais tecnológica, precisamos de pessoas tecnicamente capacitadas para projetarem, construírem e criarem as tecnologias do futuro. A matemática é essencial para esse empreendimento. Provavelmente esse argumento é verdade, mas não existem evidências de que o currículo de matemática escolar forneça suporte para esse objetivo da forma ideal. Alguém com opinião divergente poderia até ser tentado a argumentar que, ao transformar milhões de crianças estudantes em inimigos da matemática, a matemática escolar é contraproducente.

Professores de matemática ponderados sabem de tudo isso. Por que, então, insistimos em ensinar algoritmos? Por uma razão simples: é muito fácil discernir se um estudante dominou ou não os algoritmos. Basta pedir-lhe para que os desenvolva. A proficiência com os algoritmos pode ser um caminho para a compreensão profunda dos números

e da geometria. Um estudante que entende profundamente os números reais será capaz de executar o algoritmo da divisão longa, porque isso fará sentido para ele. Infelizmente, é possível executar os algoritmos sem sequer entendê-los – na verdade, esse é o propósito de um algoritmo! É por isso que o seu computador é tão bom com eles.

Porém, isso é mais profundo do que apenas conveniência nos testes. A maioria dos professores de matemática foi ensinada na escola a executar algoritmos. Razões, lógica, prova – tudo o que veio depois –, e esse método funcionou para eles – que agora são professores de matemática. Além disso, francamente, é difícil mensurar o crescimento do pensamento lógico e o grau e a precisão do pensamento, mas é muito fácil mensurar a capacidade de se executar um algoritmo. E – isso não é tão trivial como parece – testar a execução de algoritmos faz as notas parecerem objetivas e justas. Diretores e dirigentes de escolas – bem como o governo dos Estados Unidos –, todos gostam de mensurar a execução de algoritmos, justamente porque ela é mensurável. Muitas forças se combinam para tornar o ensino da execução de algoritmos – em vez do ensino do *entendimento* – o paradigma dominante no ensino da matemática. É claro que ensinar a execução de algoritmos, em vez do entendimento conceitual, também leva a vasta maioria dos estudantes a temer e a repudiar a matemática.

Professores de matemática ponderados também sabem de tudo isso. Em particular, Bob e Ellen Kaplan sabiam disso quando lecionavam em uma escola privada em Boston. Eles puderam ver que ter de enfocar as direções de faculdades e os obstáculos dos programas AP (de colocação avançada) e competir por notas e pelo ingresso nas faculdades desviava a atenção da matemática e retirava a alegria de sua aprendizagem. Em resposta, eles abriram o Círculo da Matemática.

Em um Círculo da Matemática, os participantes discutem, de forma colaborativa e alegre, ideias e estratégias para resolver questões interessantes propostas pelo professor. Bob adora perguntar a grupos de crianças de 4 anos de idade: "Existem números entre números?" Eles garantirão a ele que os números seguem "1, 2, 3, 4 etc.", e que não há nada faltando nessa lista. Então, eles passarão o resto da aula debatendo o que isso poderia significar: "Vocês são na verdade cinco!", "Não, quatro!", "É uma exceção à regra, que prova isso!"

Assim que você obteve as metades, não é tão difícil conseguir que os estudantes inventem terços e, naturalmente, comecem a combinar – "o que é um terço e um terço e um terço?" A recombinação reforça o conceito. Não é um acidente que "fração" e "fratura" vêm da mesma raiz latina. Eventualmente, pizzas ou tortas se tornarão os objetos a

serem fracionados e, então, a força das imagens entra no arsenal dos estudantes. Inicialmente, a ideia de reunir "cinco unidades de um terço" provoca uma explosão de alegria, mas "um terço e dois terços de pizzas" provocam uma sensação estranha. Bob e Ellen nada oferecem a seguir, além de incentivo e perguntas aparentemente obtusas. Às vezes, observando, eu mal conseguia me conter para não pegar o giz de um deles e esclarecer a sua óbvia confusão. É claro, a intolerável "estupidez" que eles exibiam era parte do ato e funcionava até com mais força nos estudantes do que em mim. Os estudantes não resistiam a corrigir as suposições ridículas de Bob ou de Ellen, que, é claro, forçavam os estudantes a esclarecer o seu próprio pensamento.

A pergunta sobre a quantidade de pizza, no total, que Charlie tem, se ele tem metade de uma pizza de salaminho e damos a ele um terço de uma pizza de queijo, acabará surgindo. Esse é um problema válido – a adição de frações é um recife de corais que faz as relações matemáticas naufragarem diariamente. Os estudantes de 4 anos darão "dois quintos" como a resposta óbvia – some as partes de cima e some as partes de baixo. Há uma lógica convincente para essa resposta (Eu devo observar que os estudantes podem não estar usando a notação padrão ou os nomes para as frações. Eles descobrirão a necessidade de uma notação e de uma terminologia, e inventarão as suas próprias. A regra é ficar fora do caminho deles). Ao final, algum cético brilhante na multidão notará que Charlie começou com metade de uma pizza e ganhou mais, mas, de acordo com esse cálculo, acabou com menos do que a quantidade com que iniciou. Isso deveria causar consternação. Deixe que eles esquentem a cabeça, pois esse é um problema cuja solução constrói o entendimento profundo, mas não vem facilmente. A frustração irá desenvolver uma necessidade de saber e uma incrível profundidade de entendimento e posse, quando o grupo finalmente chegar à solução.

Se não surgir nenhum cético brilhante, siga em frente – talvez perguntando a eles o que aconteceria se déssemos a Charlie mais uma metade de pizza. "Um meio mais um meio é igual a um meio", pelo método recém-inventado "some as partes de cima e some as partes de baixo". Eles arrastarão você de volta para o quadro de desenhos.

Os Kaplan ensinaram esse curso inúmeras vezes. Em dez semanas, um grupo de crianças de 4 e 5 anos, com um hábil empurrão, vai inventar uma linha numérica, preenchê-la com frações, descobrir como somá-las, subtraí-las, multiplicá-las e dividi-las, descobrir os números decimais e perceber que todas as frações podem ser escritas como decimais, mas não vice-versa. Sobretudo, as crianças receberão essas ideias com entusiasmo e as guardarão com uma confiança que poucas pessoas atingem por meio de uma instrução mais padronizada.

Bob e Ellen começaram em 1994, no porão de uma igreja, com crianças em sua maioria trazidas da comunidade de imigrantes russos em Boston. Pelos pais, eles souberam da tradição russa dos *matematicheskiy kruzhok*, salas de resolução de problemas matemáticos. O espírito parecia condizente com suas intenções, então eles aproveitaram o nome (*kruzhok* significa "círculo" em russo). A partir dessas primeiras sessões com 12 crianças, elas cresceram rapidamente com a divulgação boca a boca. O casal tomou emprestado um espaço nas universidades do Nordeste e de Harvard. Agora, eles atendem mais de 200 estudantes a cada semestre, em dois locais na região de Boston. E suas ideias estão se espalhando – Bob e Ellen estimam que existem mais de 20 grupos como o Círculo da Matemática atualmente em operação nos EUA.

Talvez a ideia de praticar matemática por diversão pareça inacreditável para você. Convido-o a considerar os fenômenos do *sudoku*, ou do *cubo de Rubik*, ou seu quebra-cabeças desafiador favorito. As pessoas têm grande satisfação em raciocinar logicamente até a solução de um quebra-cabeças de início insolúvel. Essa satisfação é exatamente o sentimento que os matemáticos extraem dos seus problemas – e os participantes do Círculo da Matemática extraem dos seus. De alguma forma, o currículo escolar eliminou o desafio, todo o entusiasmo e todo o prazer da busca.

Uma virada brasileira

No outono de 2012, Flavio Comim, Angels Varea e a filha de 5 anos de ambos, Marina, estavam em um período sabático em Cambridge, Massachusetts, após deixar sua casa em Porto Alegre, no Brasil. Flavio, economista de desenvolvimento brasileiro, estava trabalhando com Amartya Sen em Harvard. Angels e Flavio, por sugestão de seu locador, matricularam Marina no Círculo da Matemática. Angels estava sentada no fundo da sala, assistindo – pais "bem-comportados" têm permissão para permanecer como observadores, com o consentimento dos filhos. Cinco minutos após entrarem, Marina, de olhos brilhantes, virou-se na cadeira e fez um sinal para sua mãe.

"Anote tudo isso!" – Angels o fez. Naquela noite e todas as terças-feiras durante o resto do semestre, elas deram a Flavio um relato entusiasmado sobre o milagre matemático do qual vinham participando. Uma sala cheia de crianças de 5 anos criando matemática, em uma colaboração animada e impressionante. Antes de deixar Cambridge para retornar ao Brasil, Angels agradeceu a Bob e a Ellen pela experiência maravilhosa. Como faz com todos que estão perto, Bob disse: "Quando você chegar em casa, comece um Círculo da Matemática".

Angels Varea não faz coisas modestas. Ao chegar em casa, ela se reuniu com o marido para escrever uma proposta de licença para iniciar mil Círculos da Matemática, que enviou ao Instituto TIM. O início envolveu a contratação de 50 pessoas – Angels e Flavio os chamam de "educadores", na maioria estudantes universitários, para conduzir até 20 Círculos da Matemática por semana. Os Kaplan foram ao Brasil e passaram uma semana treinando os educadores sobre os princípios de realização de um Círculo da Matemática. No primeiro ano, os educadores, que moram em sete diferentes cidades brasileiras, realizaram seus Círculos em escolas públicas urbanas, atingindo algumas das crianças e dos jovens mais pobres e desfavorecidos – eles atendem principalmente crianças entre 7 e 11 anos de idade – do país.

Ana Cláudia Pinheiro Torres é uma educadora típica. A séria e criteriosa jovem de 25 anos se formou recentemente em administração de saúde pela Universidade de Brasília (UnB). Ela aspira a uma carreira na área de administração hospitalar. Uma das quatro crianças era filha de um bombeiro e de uma professora de escola. Ela havia frequentado uma escola privada de ensino fundamental vinculada a uma instituição religiosa; depois, havia passado um ano em uma escola pública e, então, seis anos em um colégio militar. As diferenças foram enormes. O ano na escola pública foi marcado por professores desatenciosos e por administradores sem envolvimento. Suas lições de matemática consistiam em problemas escritos no quadro-negro para serem trabalhados sem orientação. A professora de matemática faltava com frequência, e não havia substituto, apenas uma hora de tempo sem supervisão. O colégio militar salvou a menina. Ela aprendeu a gostar de disciplina, ordem, estrutura. Gostava da dedicação e do trabalho árduo de seus professores. Descobriu uma paixão pela ciência que era alimentada por um professor de física fenomenal, que também ensinou a ela um novo apreço pela matemática.

A desastrosa situação da educação pública brasileira é um tema que surgiu repetidamente durante minha semana no Rio de Janeiro. Ana e outros educadores me contaram casos de desespero dos estudantes, de professores ausentes e desatenciosos, de gestão ineficiente. Indicadores internacionais de eficiência educacional respaldam a sensação de crise dos educadores. Seja usando como métrica o Programa Internacional de Avaliação de Estudantes (*Programme for International Student Assessment* – PISA) ou as Tendências no Estudo Internacional de Matemática e Ciências (*Trends in International Mathematics and Science Study* – TIMSS), o Brasil está fracassando. Os estudantes brasileiros registram mais de um desvio-padrão abaixo da média internacional em desempenho em matemática, em ambos os exames. O projeto Curva de Aprendizado, da Pearson, compila um índice geral de habilidades cognitivas e o nível de educação

de 40 países desenvolvidos e em desenvolvimento. O índice é calculado com o uso dos dados de várias avaliações internacionais de leitura, matemática e ciências (PISA, TIMSS e *Progress in International Reading Literacy Study* – PIRLS), e com os índices de alfabetização e graduação de cada país. De acordo com essa medição robusta, o Brasil está em 38º ou 40º lugar, um e três quartos de desvio-padrão abaixo da média.

Não creio que Ana Cláudia conheça esses dados, mas acho que ela se surpreenderia com eles. São decepcionantes, mas não surpreendentes. "Isso [o Círculo da Matemática] poderia transformar a educação no Brasil", diz ela. "A saúde e a educação são os nossos dois maiores problemas, e eu gostaria de contribuir para a sua solução. Se eu quiser um país melhor, tenho de preparar as crianças". Ela está particularmente empolgada com o efeito liberador e empoderador das ideias dos Kaplan: "As crianças têm grandes ideias e criatividade. Elas enxergam mais do que nós. Este método reconhece isso e dá poder à criança".

O Círculo

Eu me surpreendo continuamente com o otimismo dos educadores do Círculo, à luz dos problemas da educação brasileira sobre os quais eles têm muita consciência. É possível que isso venha "de cima". Flavio e Angels estão muito impressionados. Eles são intelectuais em uma missão. Conversam sobre as ideias de John Rawls e Amartya Sen, e desenvolvem um plano para refazer a política educacional de um país com 200 milhões de habitantes. E, então, eles trabalham para implementá-la. Que tipo de pessoa faz isso? Pessoas seriamente bem organizadas, profundamente apaixonadas e comprometidas, otimistas.

Pergunto a eles o que estão tentando realizar. Eles me falam sobre a lamentável situação da educação brasileira e explicam que encaram seus esforços como um experimento, uma tentativa de tentar algo diferente e ver se são capazes de obter resultados melhores. Flavio diz: "A matemática está no centro, quando falamos em educação. E é usada para excluir, desde os bons empregos até o acesso à universidade. Mesmo entre as nossas crianças de 7 anos, quando alguém comete um erro aritmético, ouço elas dizerem umas às outras: 'Cale a boca! Você é burro!'. O acesso ao conhecimento matemático é uma questão de justiça social".

Angels diz: "É muito mais do que apenas matemática – este método em que os estudantes derrubam paredes e são deixados com seus próprios recursos. É a produtividade do esforço e da perseverança. Isso pode ajudar você em toda a sua vida".

Os 66 educadores empregados pelo Círculo em seu segundo ano atingem, a cada semana, 7 mil estudantes em seus Círculos da Matemática. Isso parece muito, até que você se dá conta de que existem aproximadamente 15 milhões de brasileiros entre 7 e 11 anos de idade. Flavio e Angels têm consciência disso, mas sua visão é ampla. Eles avaliam cuidadosamente o progresso dos estudantes que atendem conforme uma variedade de medidas cognitivas, atitudinais e comportamentais. Estão tentando construir um argumento científico de que a abordagem dos Kaplan é superior à atual pedagogia matemática utilizada no Brasil e, assim, esperam provocar uma discussão e, talvez, uma revolução na pedagogia matemática.

Dyego Soares de Araújo não é um educador típico do Círculo. Ele é estudante de pós-graduação em matemática no Instituto Nacional de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), o mais prestigiado instituto de pesquisa matemática da América do Sul. Nenhum outro educador tem tanto treinamento matemático e, aparentemente, tanta atitude. Dyego é incrivelmente questionador e demonstra um senso quase infantil de curiosidade em relação à matemática. Essa é uma característica que vi anteriormente em matemáticos supercriativos. Imagino que ele seja fabuloso em inspirar seus estudantes, uma impressão que se confirma quando Dyego me fala sobre se deparar no recreio com um grupo de estudantes trabalhando em um problema sobre números quadrados que ele lhes havia apresentado. Ele me diz que esse é um dos seus grandes momentos no Círculo da Matemática.

A educação inicial de Dyego ocorreu em uma escola vinculada a uma instituição religiosa, mas o resto dos ensinos fundamental e médio ocorreram em uma escola pública. Assim como Cláudia, ele é cheio de histórias de negligência e falta de atenção por parte dos professores. Também como ela – e, na verdade, como quase todos os educadores com quem conversei –, ele tem uma história sobre um professor ótimo que demonstrou interesse especial por ele. No seu caso, era um professor de matemática, que lhe disse: "Não preste atenção durante a aula, leia o livro escolar depois". Em vez disso, o professor lhe deu livros de matemática para que ele lesse durante a aula – Dyego leu sobre a solução do *paradoxo cúbico do infinito* de Galileu e trabalhou em sua própria aproximação para o *pi*.

Menos de um terço dos educadores do Círculo realmente estudaram matemática. Cerca de outro terço está em programas de treinamento de professores, e o restante vem de todas as áreas. Conheci cientistas políticos, economistas e um geólogo. O que eles têm em comum é o otimismo e a paixão por mudar o mundo ou, pelo menos, o Brasil. Eles também adoram trabalhar com crianças e me contaram sucessivas histórias sobre as

dificuldades enfrentadas pelos estudantes – sujeira e corrupção nas escolas, brigas, professores negligentes e carência de atenção. Eles me disseram: "Estas crianças são o futuro". A mim, ocorre que esses jovens educadores são, de certa forma, o futuro mais imediato do Brasil. Isso também ocorreu a Angels e a Flavio: quase nada escapa a eles. Ambos me dizem que o desenvolvimento dos próprios educadores é sempre uma de suas preocupações: "Estas pessoas estarão nas escolas, nas empresas e nas universidades do Brasil por 30 ou 40 anos. Elas estão vendo alguns dos problemas do país e desenvolvendo ferramentas para refletir sobre eles, para potencialmente resolvê-los".

Mitos da matemática e ciência do cérebro

Os Kaplan gostam da analogia com a educação musical: "Suponhamos que ensinemos música dizendo que, se você praticar as escalas em um teclado silencioso por seis anos e, então, passar em um teste disso, você jamais terá de tocar um instrumento real – e, se você conseguir uma nota suficientemente alta, você nem precisará ouvir música novamente!", dizem eles (KAPLAN; KAPLAN, 2007). "Essa é a promessa que mantemos na escola: memorize seus algoritmos, e as calculadoras farão o cálculo para você a partir deles".

Qualquer matemático lhe dirá que a matemática é uma coleção de ideias e conceitos belos, sutis, inter-relacionados e lógicos. O fato de existirem diferentes tamanhos de conjuntos infinitos; o fato de que, apesar de os números racionais e irracionais serem completamente interpenetrados – ou seja, entre quaisquer dois números racionais há um irracional, e vice-versa –, existem infinitamente muito mais números irracionais do que racionais; o fato de existirem infinitamente muitos números primos. Todos esses fatos são "prelúdios e fugas de Bach da matemática", e os não especialistas podem entendê-los e apreciá-los, embora eles raramente mostrem essas ideias. Por alguma razão, oferecemos uma dieta rígida de "hinos religiosos" para as crianças estudantes durante 12 anos – guardando as "sinfonias de Beethoven" para os iniciados – e, então, nos surpreendemos com o fato de tão poucos gostarem de matemática.

É verdade que é essencial o conhecimento de alguns fundamentos: por exemplo, é preciso saber a diferença entre números racionais e irracionais para entender as asserções do parágrafo anterior. Isso é parte da razão pela qual ensinamos fundamentos em primeiro lugar. Porém, o mesmo se aplica à música e, apesar disso, damos um clarinete ou um piano para uma criança e deixamos que ela experimente os instrumentos desde

o princípio. Os Kaplan abordam a educação matemática exatamente da mesma forma – por meio da *prática criativa*.

É fácil entender por que se ensina matemática da forma como se ensina. A estrutura conceitual que apoia a matemática é uma das principais realizações da humanidade, construída ao longo de milênios, logicamente rigorosa e tecnicamente intrincada. Iniciando pelos primeiros princípios fundamentais e continuando com a dedução lógica, captamos o vasto espaço da matemática. Euclides começou com 10 axiomas e deduziu 465 teoremas de geometria, álgebra e teoria dos números. E esse edifício se mantém erguido há mais de 2 mil anos como um modelo de como se escrever sobre matemática e se tornou o modelo de como se ensinar matemática. Contudo, a estrutura lógica não é a essência da matemática. É a criação da *visão retrospectiva*: o conhecimento matemático está encoberto por um processo incoerente, desajeitado e caótico, e ensiná-lo fornece aos estudantes acesso à emoção da descoberta e percepção quanto à natureza real e criativa da tarefa.

As pessoas que apreciam a matemática apreciam brincar com as ideias e encontrar novas conexões e relações. Os Kaplan acreditam que todos devem brincar com a matemática. Eles argumentam que a educação matemática é debilitada pelo *mito do talento*: a crença de que algumas pessoas têm um "cérebro para matemático" ou um "gene matemático" e de que essas pessoas, apenas elas, são capazes de entender matemática. Eles argumentam que o raciocínio matemático é uma característica fundamental do pensamento humano. Que todos somos moldados biologicamente para criar abstrações matemáticas. É a nossa linguagem nativa.

Como quase todos acreditam no mito do talento, a insistência dos Kaplan no argumento de que *todos podem criar ideias matemáticas* é difícil de aceitar. Porém, a recente pesquisa de ciência cognitiva parece respaldá-los. Agora, cientistas cognitivos acreditam que nós – e alguns animais – temos mecanismos inatos para individualizar objetos e computar números. Nossos cérebros também são dotados de estruturas para estimação, contagem, comparação de números e adições e subtrações simples (DEHAENE, 1999). Bob e Ellen não precisam de resultados de pesquisas. Eles têm evidências de 20 anos de observação pessoal de milhares de indivíduos criando matemática nas aulas deles.

Conteúdo *versus* método

Os Kaplan não são as primeiras pessoas a pensar sobre o uso de métodos dirigidos pela investigação para a instrução matemática. Na matemática, frequentemente esses

métodos levam o nome de *método Moore* ou *estilo Texas*, em homenagem a Robert Lee Moore, que lecionou na Universidade do Texas, usando uma forma radical dessa instrução de 1920 a 1969. Moore era um indivíduo competitivo, racista e às vezes detestável, e seus defeitos de personalidade motivaram o menosprezo por suas ideias de ensino. Fora do círculo de seus (50) estudantes de doutorado, suas ideias tiveram pouco impacto durante sua vida. A principal crítica a elas é a mesma acusação que às vezes bate à porta dos Kaplan. A matemática é a nossa disciplina científica mais antiga, com uma história de 5 mil anos e, ao longo desses milênios, nós construímos uma rede de ideias vasta, intrincada e interconectada. Pedir a qualquer indivíduo ou pequeno grupo de indivíduos para recriar qualquer parte da matemática, como uma forma de aprendizagem, é uma tarefa tola. O tempo necessário para que você aprenda isso é longo demais para se desperdiçar com redescobertas.

Amartya Sen, em um recente seminário sobre "matemática e desenvolvimento" em Harvard, organizado para discutir o trabalho dos Kaplan no Brasil, fez uma crítica relacionada e um pouco mais sutil: "Sim", disse ele, "a matemática promove o desenvolvimento do raciocínio. Mas você precisa de algo sobre o que raciocinar. As pessoas recebem materiais com que trabalhar" (INSTITUTO TIM, 2013-2017). Uma pessoa da plateia observou que não tinha recebido nada além de conceitos básicos até entrar na universidade, quando finalmente lhe pediram para aplicar lógica e raciocínio a esses conceitos, que tinham sido incutidos em sua mente nos 12 anos de educação anteriores. Esse parece ser o compromisso com o qual a elite matemática dos EUA concordou: "Durante 12 anos, nós encheremos suas mentes com a sabedoria das diferentes épocas, despejada como fatos e procedimentos a serem memorizados. E, na universidade, se você se decidir pela ênfase em matemática, começaremos a falar sobre *prova*, *lógica* e *dedução*".

É um compromisso forjado com boas intenções, em uma América da era industrial, como uma forma de oferecer o conhecimento matemático necessário para se atuar como um cidadão que contribui e como um trabalhador produtivo – e fazer isso para o máximo de pessoas possível por meio da educação pública. É também fundamentado em um modelo psicológico da mente como uma lousa ou um balde vazios, esperando para serem preenchidos com conhecimento – a educação era apenas uma questão de preencher eficientemente o cérebro, como se fosse um pote de mostarda na esteira de produção de uma fábrica. Sabemos que a aprendizagem é muito mais complicada do que isso, assim como temos evidências de mais de um século em que nossos métodos de instrução matemática levaram a uma ignorância disseminada e a um desapreço pela matéria.

A iniciativa radical dos Kaplan consiste em abraçar total e entusiasticamente os fatos de que o raciocínio é o coração da matemática e de que as pessoas, inclusive crianças de 4 anos, podem começar a raciocinar matematicamente sobre as questões mais sofisticadas e a construir seu o próprio corpo florescente de conceitos e noções. Elas começam com o conhecimento da contagem inicial de números e perguntam o que acontece quando prosseguimos (números grandes, eventualmente o infinito), quando recuamos (números negativos, também eventualmente o infinito) e quando ficamos no meio (frações, decimais, novamente o infinito).

Bob e Ellen levaram a sério o segundo argumento defendido para o ensino de matemática – o de que o estudo sério da matemática desenvolve habilidades do pensamento crítico e lógico – e tentaram otimizar esses resultados. Na verdade, sua intenção inicial consistia em maximizar a alegria e o apreço pela matemática entre seus estudantes. O fato de que sua abordagem também otimizou o desenvolvimento do pensamento crítico foi, a princípio, simplesmente uma consequência bem-vinda. Agora, após 20 anos de ensino da matemática orientado pela curiosidade – em vez de orientado pelo currículo –, eles têm argumentos mais ousados. Sua abordagem proporciona resultados melhores em todas as três metas articuladas: seus estudantes desenvolvem senso numérico e geométrico; seus estudantes mostram habilidades de lógica e pensamento crítico mais fortes; e seus estudantes desenvolvem interesse em aprender mais matemática – até mesmo entusiasmo e paixão por ela.

A julgar por esses resultados, os Kaplan não ficarão satisfeitos com experiências de enriquecimento semanais de uma hora de duração para o pequeno número de crianças com as quais eles aplicam a matemática a cada semestre. Sua colaboração com Angels Varea e Flavio Comim lhes permite sonhar mais alto. Os quatro imaginam um mundo em que todo o aprendizado de matemática é realizado de acordo com as linhas kaplanianas. Todos eles reconhecem o desafio. Contudo, essa equipe, felizmente reunida em seu encontro de Cambridge, parece idealmente talhada para provocar uma revolução nacional. Flavio e Angels sabem como sensibilizar governos e responsáveis por políticas. Flavio parece ter em sua mente um mapa das alavancas que devem ser acionadas para movimentar a elite educacional brasileira. Angels tem a paciência e o comprometimento para discutir com eles e para motivá-los. Ambos têm habilidades extraordinárias de organização, gestão e persuasão. Bob e Ellen têm uma visão determinada e uma capacidade ilimitada de inspirar e encantar.

Desdobramentos paralelos

Nos Estados Unidos, existem algumas forças em lento movimento que trabalham para disseminar a instrução matemática orientada pela curiosidade. Há duas décadas, os Kaplan pregam seu evangelho do esclarecimento matemático a quem quer escutar. Eles publicaram um livro maravilhoso, "Out of the labyrinth: setting mathematics free" ("Fora do labirinto: libertando a matemática", em tradução livre), para explicar suas ideias. E, a cada verão, organizam uma oficina na Universidade de Notre Dame para pessoas de todo o país e do mundo que quiserem aprender a ensinar matemática por meio da investigação. Os participantes dessa oficina de duas semanas de duração saem com o entusiasmo de convertidos. Frequentemente, eles são professores de matemática frustrados com a sua incapacidade de fazer com que os estudantes enxerguem a beleza e a coerência interna da matemática. Assim, vão para casa, fundam Círculos da Matemática e espalham a boa-nova.

De forma simultânea e coincidente, ideias semelhantes vêm se espalhando lentamente entre as universidades e as faculdades de matemática norte-americanas. Aqui, a força propulsora é uma pequena fundação, a *Educational Advancement Foundation*, com sede em Austin, Texas, que é financiada quase totalmente por um reticente milionário do petróleo texano, Harry Lucas. Ele foi aluno de R. L. Moore na Universidade do Texas há mais de um século. Ficou tão impressionado com as ideias pedagógicas de Moore que se devotou a ele, além de devotar uma parte de sua fortuna à preservação e à promoção dessas ideias. Todos os anos, desde 1998, a Fundação organiza a *Legacy of R. L. Moore Conference*[1] (Conferência sobre o Legado de R. L. Moore) para divulgar suas ideias pedagógicas. Ela ocupa um estande no salão de exposições das principais conferências nacionais de matemática. Financia projetos para instituir e estudar a instrução orientada pela investigação em faculdades e universidades de todo o país. Financia o periódico "Journal of Inquiry-Based Learning" e encomendou uma biografia de Moore. Grupos de professores de matemática de faculdades e universidades estão experimentando a instrução orientada pela curiosidade. Muitos deles, inflamados pelo tipo de entusiasmo que os Kaplan inspiram, estão trabalhando para converter seus colegas e escrevendo livros escolares e outros materiais institucionais para ajudá-los a adotar esses métodos.

Existem aproximadamente 30 mil professores de matemática nos EUA. Uma pequena fundação do Texas não alcançará todos eles, nunca se preocupará em convencê-los a jogar fora todos os seus "truques" pedagógicos, seus métodos e noções aprendidos a

1 Disponível em: <http://legacyrlmoore.org/events.html>.

duras penas e a reorganizar suas vidas de ensino inteiras em torno de novos princípios. Essa fundação muito menos irá produzir uma mudança análoga nas práticas de centenas de milhares de professores de matemática primários e secundários.

A história dos últimos 50 anos da educação matemática dos EUA é uma cantilena de esforços reformistas malsucedidos: *nova matemática* nos anos 1960, as *guerras da matemática* e os *padrões NCTM* dos anos 1980 e os *common core standards* atuais. Esses movimentos compartilhavam o mesmo ideal básico: "vamos ensinar entendimento matemático, em vez de memorização de rotas". Todos fracassaram nisso, e fracassaram pela mesma razão: os professores encarregados de implementar essas reformas não foram adequadamente treinados e apoiados para inculcar o entendimento. É preciso um grau de autoconfiança matemática enorme e incomum para que alguém se abstenha de contar a seus estudantes o que ele sabe. Fornecer aos estudantes a liberdade de explorar e formular suas próprias questões e seus próprios caminhos significa o risco de eles formularem perguntas para as quais o professor não sabe a resposta. O professor autoconfiante expõe com alegria a sua ignorância e desce ao caminho vagamente iluminado com seus estudantes, em busca do entendimento. O professor menos confiante teme expor sua ignorância, sabe que em matemática existe uma "resposta certa" e acredita que deve conhecê-la ou saber como chegar a ela.

Os professores não precisam de novos currículos ou de outra lista de objetivos e padrões a serem atingidos, menos ainda de testes padronizados a serem aplicados para avaliar o progresso dos estudantes quanto ao atingimento desses padrões. Os professores precisam é de *treinamento matemático* que modele o ensino eficiente para o entendimento. Os professores precisam experimentar a sua própria exploração matemática, formular suas próprias questões, encontrar suas próprias respostas, aprender a confiar em seus próprio potencial de raciocínio matemático, e experimentar a emoção liberadora e revigorante da descoberta matemática. Essa é a única forma de eles aprenderem a proporcionar essa experiência a seus estudantes.

Provavelmente, a reformulação completa da pedagogia matemática dos Estados Unidos conforme as linhas kaplanianas será um trabalho de várias gerações. No entanto, assim que alguém tenta isso, é obviamente a coisa certa a se fazer. "Conte-me e eu esquecerei. Pergunte-me e eu descobrirei", gostam de dizer os Kaplan. O resultado implícito disso é claro para todo e qualquer matemático: *o conhecimento matemático que é descoberto por você mesmo é o conhecimento mais óbvio e mais claro*. Os matemáticos sabem disso pela experiência pessoal. E, após descobrir algum conteúdo de matemática, os estudantes nunca gostam que lhes contem qualquer coisa: tudo deve ser examinado, provado e

profundamente compreendido. Não existe substituto para essa investigação. Um estudante que sai da escola com essa moldagem mental levará uma vida intelectual profundamente gratificante e, muito provavelmente, contribuirá muito mais para a sociedade do que um estudante que se contenta em receber informações de forma passiva.

Bibliografia

CHOPPIN, Charles Arthur et al. *The Moore method*: a pathway to learner-centered instruction. USA: Mathematical Association of America, 2009.

DEHAENE, Stanislas. *The number sense*: how the mind creates mathematics. Oxford: Oxford University Press, 1999.

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática no Brasil*. São Paulo, 2013-2017. Disponível em: <http://www.ocirculodamatematica.com.br/>.

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

O Círculo da Matemática do domingo

Nathan Pflueger

Todos os matemáticos conhecem bem um certo paradoxo. Ao descobrir uma nova parte da matemática, eles sentem orgulho e satisfação por seu trabalho criativo. No entanto, assim que o trabalho é realizado, eles só conseguem sentir que são apenas um capítulo de uma grande história que foi escrita muito antes de existir qualquer pessoa para ouvi-la. Essa tensão, entre o orgulho de um inventor e o arrebatamento de um descobridor, é o prazer único de praticar a matemática.

O Círculo da Matemática é construído com base na crença de que todos podem ser matemáticos. Fazendo perguntas probatórias, ouvindo atentamente as respostas dos colegas, sentindo o inebriante coquetel de admiração, empolgação e perplexidade decorrente da resolução de um problema, e ouvindo o mero murmúrio daquilo que seria um padrão mais profundo e uma história mais envolvente ainda a ser contada – são essas experiências que as crianças, os adolescentes e os adultos sentem da mesma forma. O essencial é que eles devem ter total liberdade para mudar as perguntas que são respondidas, para fazê-las e solucioná-las da forma que desejarem, em vez de seguir um método ensinado a partir de um livro.

Meu foco neste artigo é o Círculo da Matemática que conduzi por dois anos em Boston, com estudantes dos ensinos fundamental e médio. Umas das características mais distintivas desse Círculo da Matemática era que eu, frequentemente, introduzia temas matemáticos que havia aprendido somente na faculdade ou na escola de pós-graduação. Isso não significa, de forma alguma, que eu esperava – ou queria – que os estudantes dominassem o jargão e a técnica dos matemáticos pós-graduados. Em vez disso, eu tentaria usar o meu próprio conhecimento de matemática mais avançada para encontrar problemas que sabia serem um terreno fértil para a exploração.

A consideração essencial ao selecionar os tópicos para o Círculo da Matemática era que cada tema deveria ser parte de uma história muito maior. O tópico também precisava ter uma base de apoio segura e fácil para os estudantes: isso geralmente significava um problema formulado de forma simples, sem o jargão matemático obscuro, o que os levaria rapidamente ao coração do tópico. A partir daí, meu objetivo era fornecer aos estudantes a primeira base de apoio e, então, recuar e deixá-los trilhar seu próprio

caminho. Eu sempre tinha alguns teoremas aos quais esperava que os alunos chegassem, mas sempre esperava, sobretudo, que todos eles me surpreendessem e chegassem a algo completamente diferente que ainda não tinha me ocorrido. Geralmente, ambas as experiências acabavam se concretizando.

A cada semestre, eu escolhia dois tópicos diferentes.

Nós nos encontramos todas as manhãs de domingo, durante dez semanas. A cada encontro, gastávamos uma hora em cada tópico, e a terceira hora era a palestra de um convidado, geralmente proferida por um estudante de pós-graduação ou por um professor de uma universidade das proximidades.

A seguir, apresento as descrições de vários tópicos semestrais representativos, com comentários.

Estudo de caso: polinômios ciclotômicos

Iniciei este conteúdo fazendo a seguinte pergunta: "como vocês podem fatorar a expressão $x^{12} – 1$?"

Como é comum, eu tinha alguns motivos ocultos para moldar essa pergunta:

- Eu esperava que os estudantes percebessem que não havia nada de especial no número 12 e tentassem substituí-lo por outros números.
- Eu esperava que os estudantes perguntassem o que, exatamente, eu queria dizer com fatorar – que tipo de fatores eram permitidos e quais não eram.

Sem dúvida, ambas as críticas emergiram naturalmente a partir de nossa discussão em aula, assim que os estudantes afundavam os pés no problema inicial o suficiente para começarem a examinar suas hipóteses. Em resposta à primeira crítica, eu gentilmente permitia que eles tentassem substituir o 12 por qualquer outro número de que gostassem. Em resposta à segunda, eu permitia que explorassem quaisquer possibilidades que cogitassem e decidissem por si próprios.

O semestre começou com muito trabalho computacional prático. Expressões polinômicas como $x^{12} – 1$ são familiares a muitos estudantes do ensino médio e fatorá-las é um procedimento padrão, mas os estudantes raramente fatoram polinômios de grau tão alto como 12 na escola. O fato de que esse trabalho estaria no nível deles, sedo difícil

apenas o suficiente devido ao seu caráter de novidade, era uma das principais razões para eu ter começado com esse problema.

Diferentes estudantes descobriram formas diferentes de "quebrar" a expressão em dois fatores – a mais familiar da escola. Algumas dessas incluíam o seguinte:

$$x^{12} - 1 = (x^6 + 1)(x^6 - 1)$$

$$x^{12} - 1 = (x^4 - 1)(x^8 + x^4 + 1)$$

$$x^{12} - 1 = (x^3 - 1)(x^9 + x^6 + x^3 + 1)$$

$$x^{12} - 1 = (x^2 - 1)(x^{10} + x^8 + x^6 + x^4 + x^2 + 1)$$

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x^{11} + x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$$

A turma rapidamente notou algumas características comuns a essas várias fatorações. Os estudantes também notaram que muitos dos termos poderiam ser fatorados ainda mais. Finalmente, na reunião do trabalho em várias partes, feita pelos vários membros da aula, eles encontraram a seguinte fatoração, que parecia ser o máximo a que tinham conseguido chegar:

$$x^{12} - 1 = (x - 1)(x + 1)(x^2 + x + 1)(x^2 + 1)(x^2 - x + 1)(x^4 - x^2 + 1)$$

Alguns estudantes, porém, satisfizeram à segunda das minhas expectativas iniciais e observaram que poderíamos ir ainda mais longe introduzindo *raízes quadradas* – e ainda mais longe usando *números imaginários*. Os dois exemplos seguintes representam duas das observações deles:

$$x^4 - x^2 + 1 = (x^2 + \sqrt{3x} + 1)(x^2 - \sqrt{3x} + 1) \text{ e}$$

$$x^2 + 1 = (x + \sqrt{-1})(x - \sqrt{-1})$$

Essas fatorações brilhantes apresentaram à turma um dilema: os estudantes deveriam se restringir à fatoração de números inteiros ou permitir raízes quadradas e números imaginários? Eles decidiram provisoriamente enfocar o que poderiam fazer com os inteiros, mas deixar as questões mais amplas abertas para exames futuros.

Assim que suas ferramentas foram afiadas pelo problema original, eles fizeram um trabalho rápido com muitos outros casos similares. Algumas dessas descobertas são listadas abaixo:

$x^1 - 1 = \underline{(x - 1)}$

$x^2 - 1 = (x - 1)\ \underline{(x - 1)}$

$x^3 - 1 = (x - 1)\ \underline{(x^2 + x + 1)}$

$x^4 - 1 = (x - 1)\ (x + 1)\ \underline{(x^2 + 1)}$

$x^5 - 1 = (x - 1)\ \underline{(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$

$x^6 - 1 = (x - 1)\ (x + 1)\ (x^2 + x + 1)\ \underline{(x^2 - x + 1)}$

$x^7 - 1 = (x - 1)\ \underline{(x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$

$x^8 - 1 = (x - 1)\ (x + 1)\ (x^2 + 1)\ \underline{(x^4 + 1)}$

$x^9 - 1 = (x - 1)\ (x^2 + x + 1)\ \underline{(x^6 + x^3 + 1)}$

$x^{10} - 1 = (x - 1)\ (x + 1)\ (x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)\ \underline{(x^4 - x^3 + x^2 - x + 1)}$

$x^{11} - 1 = (x - 1)\ \underline{(x^{10} + x^9 + x^8 + x^7 + x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)}$

$x^{12} - 1 = (x - 1)\ (x + 1)\ (x^2 + x + 1)\ (x^2 + 1)\ (x^2 - x + 1)\ \underline{(x^4 - x^2 + 1)}$

O último fator de cada linha está sublinhado porque desempenha um papel especial: é o único fator que a turma já tinha visto anteriormente na lista. Aparentemente, sempre que a turma fatorava outro polinômio $x^n - 1$, os estudantes descobriam uma lista de fatores que estavam presentes nas linhas anteriores – e exatamente um fator a mais. E ainda mais do que isso: essas fatorações pareciam depender dos divisores de *n*. De fato, os fatores de $x^{12} - 1$ consistiam nos fatores sublinhados de $x^n - 1$ para os valores n = 1, 2, 3, 4 e 6: os divisores de *n*.

Nesse ponto do curso, os fatores sublinhados tinham se relevado importantes o suficiente para merecerem seu próprio nome, e eu provoquei os estudantes contando a eles o seu nome oficial na matemática mais avançada: eram os *polinômios ciclotômicos* e tinham um papel importante em muitos tópicos da pesquisa atual no campo da teoria algébrica dos números. No entanto, o Círculo da Matemática não precisou saber de nenhum desses polinômios para estudá-los: tudo do que precisou foi uma questão simples sobre um polinômio individual.

A partir desse ponto, na aula, examinávamos algumas questões que surgiam naturalmente dessas investigações:

- Se raízes quadradas e números imaginários eram permitidos, até que ponto os polinômios ciclotômicos ainda poderiam ser fatorados?
- Quando se dobra o *n*, o novo polinômio cliclotômico tem o mesmo número de termos do anterior. Por que isso acontece?
- Da mesma forma, por que o polinômio cliclotômico para n = 9 se parece tanto com o de n = 3?

A turma fez muitas observações excelentes sobre essas e sobre outras questões, mas o semestre terminou rapidamente, e muitas perguntas ficaram em aberto.

Estudo de caso: a geometria dos acordes musicais

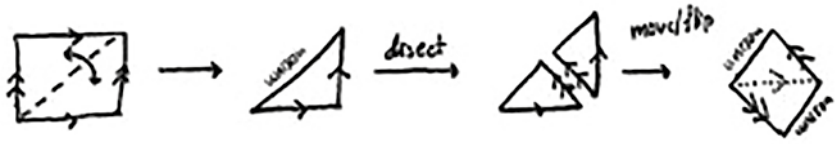
Este tópico foi inspirado em um livro lançado recentemente, intitulado "The Geometry of Music" ("A geometria da música", em tradução livre), de Dmitri Tymoczko (TYMOCZKO, 2011).

Meu objetivo inicial era guiar a turma através da mesma epifania de Tymoczko, que o motivou a escrever seu livro: você pode visualizar um "espaço de acorde de duas notas" como uma forma matemática famosa, chamada de *fita de Möbius* (TYMOCZKO, 2011). Sem revelar o final para os estudantes, eu comecei com uma pergunta vaga: "qual é a 'geometria' do espaço dos acordes musicais de duas notas?" (TYMOCZKO, 2011), Tivemos uma longa conversa para definir o que exatamente essa pergunta significava. Nós nos fixamos nas seguintes decisões:

- As duas notas podem ser desenhadas como um ponto no plano, cujas coordenadas lhe informam a nota que é tocada pelos dois instrumentos – com notas diferindo por uma unidade de semitom.
- Como duas notas com uma oitava de separação são consideradas a mesma nota, poderíamos eliminar tudo do plano, exceto um quadrado 12 x 12, e deveríamos considerar os cantos opostos desse quadrado como "o mesmo" – como quando você joga Pacman, e cruzar a borda faz você surgir do outro lado.
- Se os dois instrumentos forem do mesmo tipo – ou talvez duas notas no mesmo piano –, de alguma forma, também deveríamos dobrar esses quadrados ao meio, de modo que (x, y) se torna o mesmo ponto de (y, x).

Tendo estabelecido essas regras fundamentais, os estudantes partiram para a tarefa de tentar definir como seria esse "espaço" resultante. Após uma longa conversa e muitas

ideias diferentes, eles afinal descobriram uma bela forma de reduzir e rearranjar o quadrado, que é mostrada abaixo:



Nessas imagens, as setas dos lados indicam cantos que devem ser identificados. A imagem final na extremidade foi precisamente a imagem que levou à epifania de Tymoczko – um fato que eu contei a eles apenas no final. É uma das formas mais convenientes de representar a famosa *fita de Möbius*.

A partir desse ponto, seguimos para a próxima pergunta natural: "e as três notas?" A maior parte do semestre envolveu desenhar cuidadosamente imagens tridimensionais que pudessem revelar uma imagem tão bela quanto essa fita de Möbius. Seguiu-se uma maravilhosa interação dos estudantes dotados dos vários talentos necessários para a tarefa: grandes visualizadores para ver, através de toda a massa dos diagramas, as formas subjacentes; grandes desenhistas para desenhar as figuras cada vez mais barrocas no quadro virtual; e grandes pensadores analíticos para manter as ideias organizadas e precisas por trás de dissecações e rearranjos.

Assim que obtivemos uma representação do espaço do acorde de três notas – o que Tymoczko chama de "orbivariedade (*orbifold*) musical" e os matemáticos chamariam de "cubo simétrico do círculo" –, a turma tentou trabalhar na questão correspondente em quatro dimensões, mas o quadro virtual se mostrou insuficiente para esse esforço (TYMOCZKO, 2011).

Estudo de caso: sistemas diabólicos

Este curso foi um esforço para fornecer aos estudantes um espaço significativo para experimentos de computação. Nosso tópico eram sistemas dinâmicos, o que os estudantes rapidamente rebatizaram de "sistemas diabólicos", por razões que serão explicadas resumidamente. O curso logo se transformou em um contraponto de prova e experimentação: os estudantes provaram os resultados possíveis e coletaram dados extensivos para sugerir os fatos que tentariam provar a seguir.

Comecei propondo o seguinte quebra-cabeças aos estudantes: existe uma população de certo tipo de animal que se reproduz de uma forma muito estranha – se existem *x* milhões deles em um dia, então serão 4x (x – 1) milhões no dia seguinte.

Perguntei à turma: "Como essa população cresce? Ela finalmente se estabiliza em algum nível? Ela oscila bruscamente? Ela eventualmente se extinguirá?

Um estudante imediatamente comentou que essa população havia mudado muito rápido em se tratando de animais e que, talvez, eles fossem demônios, entrando de forma rápida e sendo eliminados de forma gradativa do nosso universo. Além disso, outro estudante decidiu – por razões que não me lembro – que esses "demônios" estavam confinados no Congresso dos Estados Unidos e que *x* sempre representaria o número de demônios no Congresso. Agora, tínhamos uma nova questão: "Como o número de demônios no Congresso evoluiu ao longo do tempo?"

Alguns dos estudantes sabiam como programar razoavelmente bem e, por isso, eu levei um computador, instalei um projetor e começamos a realizar experimentos. Os resultados pareciam caóticos, e o grupo teve dificuldades para visualizar um padrão neles. O número de demônios no Congresso parecia oscilar bruscamente entre 1.000.000 (um milhão) e 0 (zero), sem sequer diminuir.

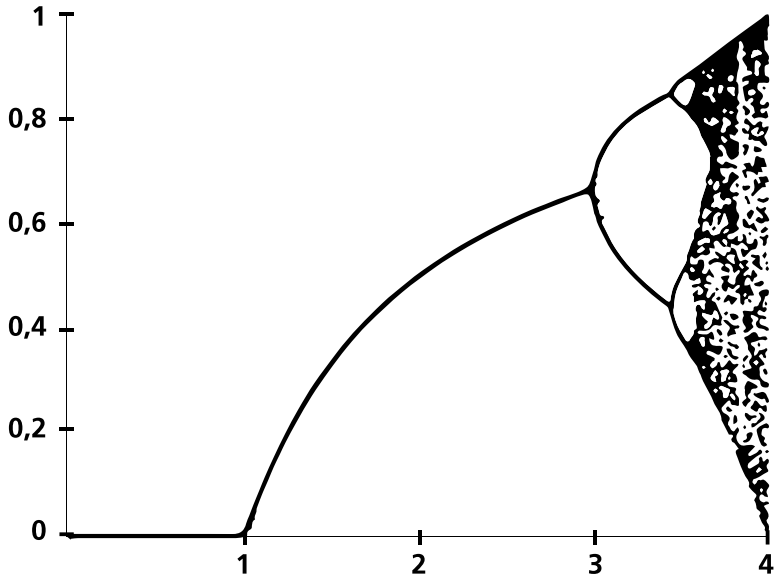
Nesse ponto, sugeri que tentássemos mudar o número 4. Substituímos esse número por uma variável *l*. Agora, a nova regra era:

demônios amanhã = lx (1 – x), onde *x* é o número de demônios hoje

Vou admitir que eu tinha um propósito específico ao fazer essa sugestão: eu havia realizado um curso de sistemas dinâmicos durante a faculdade e sabia que muitas imagens bonitas surgiriam a partir do problema. Tentei dissimular essa presciência – e, com isso, convenci muitos estudantes.

A turma logo encontrou um comportamento mais organizado para congressos, com valores pequenos de *l*: quando $l \leq 1$, eles notavam – felizmente, para a democracia – que os demônios sempre se extinguiam no longo prazo. Eles também notaram que, quando *l* está entre 1 e 3, os demônios nunca abandonavam totalmente o Congresso, mas pelo menos diminuíam até um tamanho populacional estável – diferente para diferentes valores de *l*. Porém, quando *l* se tornou maior do que 3, os mistérios aumentaram.

Para entender melhor as forças em jogo, a turma decidiu partir para o gráfico seguinte, que mostra um sortimento aleatório de congressos, com vários valores de *l*, medidos em momentos aleatórios na evolução da população de demônios:



Essa imagem deu aos estudantes a percepção do tipo de padrões que observariam para provar – e de fato eles conseguiram provar – os três teoremas seguintes, agora que os dados os tinham convencido e incentivado:

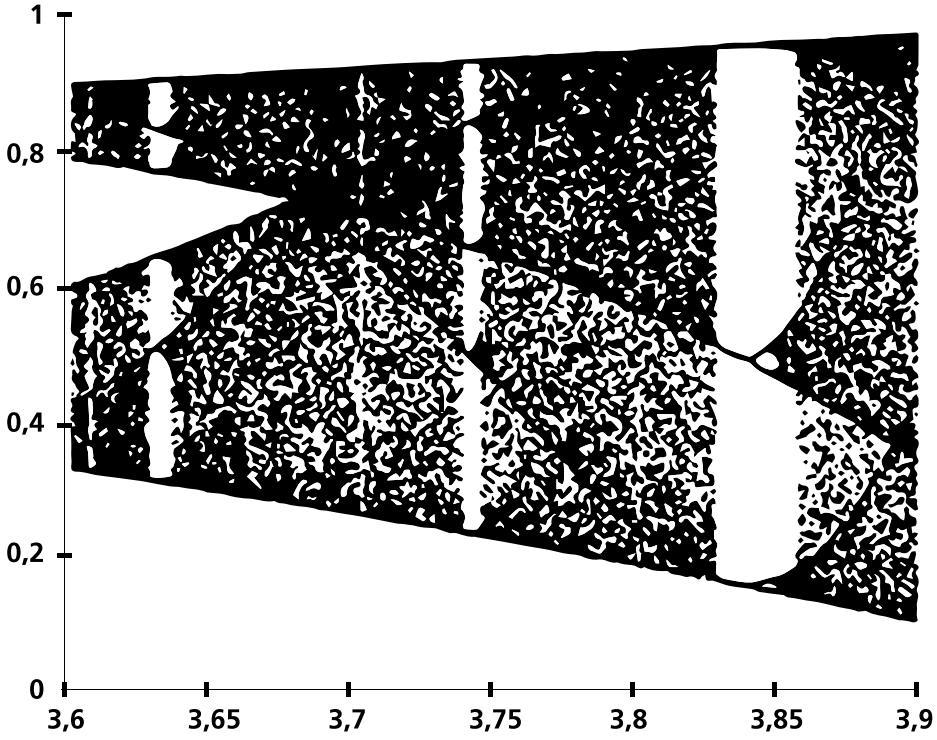
- Quando $l \leq 1$, a população de demônios converge para 0 (zero), à medida que o número de dias vai ao infinito.
- Quando $1 < l \leq 2$, a população de demônios converge para $1 - 1/l$, à medida que o número de dias vai ao infinito.

Nem todos os estudantes tinham conhecimento de cálculo. Parte do trabalho envolvido na prova desses teoremas consistia em fornecer primeiramente uma definição de *convergir* que satisfizesse a toda a turma.

Os estudantes fizeram conjeturas sobre o que acontece quando $l > 3$, mas não provaram nenhum teorema preciso. No entanto, uma das principais realizações deles consistiu em estabelecer uma definição precisa da palavra *instável*, que naturalmente surge para certas populações de demônios quando *l* é maior do que 3.

Provar teoremas na zona mais caótica de $l = 3$ era difícil demais para cursos de uma semana – geralmente, essas provas exigem um excelente conhecimento de cálculo –, mas os estudantes foram capazes de desenhar muitas imagens detalhadas e de

observar em primeira mão as fortes tensões inseridas nesse problema. Por exemplo, eles produziram a seguinte imagem, que destaca uma parte do gráfico acima e o desenha com uma precisão muito melhor:



Um estudante ficou tão impressionado com essa imagem que sugeriu imprimi-la e emoldurá-la. Ao introduzir esse tópico no curso, eu escolhi de forma deliberada um tema que quase nunca é ensinado sem o auxílio do cálculo. Meu objetivo com isso era ver o que os estudantes poderiam produzir simplesmente com suas próprias ideias. Grande parte do resultado da aula consistiu em conjeturas, em vez de teoremas.

Bibliografia

TYMOCZKO, Dmitri. *A geometry of music*: harmony and counterpoint in the extended common practice. Oxford: Oxford University Press, 2011.

Parte 4

A experiência do Círculo da Matemática do Brasil

A matemática e o desenvolvimento humano no Brasil: o caso do Círculo da Matemática

Flavio Comim

Introdução

O ensino da matemática no Brasil está próximo de ser uma tragédia humanitária. Já no 3º ano do ensino fundamental 57,07% dos estudantes de 8 anos têm aprendizado inadequado da matéria (INEP, 2015), número que passa para 61,4% no 4º ano (UNESCO, 2014) e chega aos 90,7% no final do ensino médio (INEP, 2013). No último teste do Programa Internacional de Avaliação de Alunos (*Programme for International Student Assessment* – PISA), os estudantes brasileiros de 15 anos ficaram em 65º lugar – entre 70 países – nesse *ranking*, com 70,25% dos estudantes ficando abaixo do nível considerado básico (OCDE, 2016). No *ranking* do Fórum Econômico Mundial de 2015, a qualidade do ensino fundamental do sistema educacional brasileiro foi avaliada na posição de 126º no mundo, e a qualidade da educação matemática e de ciências no país em 131º – entre 144 países. Resultado similar foi encontrado pelo "Global information technology report, 2016" (BALLER; DUTTA; LANVIN, 2016), que avalia que o Brasil está na 133ª posição – entre 139 países – na apreensão de conhecimentos matemáticos e científicos. Como consequência disso, os adultos brasileiros têm um nível muito precário de conhecimento de matemática básica: 75% não sabem médias simples e 63% não conseguem resolver contas que envolvem percentuais (INSTITUTO TIM, 2015). Essas evidências sugerem que os problemas que o Brasil tem no ensino da matemática constituem um dos maiores desafios no sistema educacional do país e que eles surgem desde muito cedo na vida das crianças.

Porém, quais são os problemas decorrentes de não sabermos matemática? Não será a matemática que aprendemos na escola mesmo inútil para o nosso desenvolvimento pessoal e para o desenvolvimento do país? Em outras palavras, por que devemos nos preocupar com o ensino da matemática em um país em desenvolvimento, como o Brasil? As razões são inúmeras, mas entre as mais importantes podemos destacar: a) a matemática ajuda a formar quem somos e faz parte do nosso "instinto arquitetônico",

que nos possibilita estruturar o mundo ao nosso redor e organizar racionalmente nossas ideias (KAPLAN; KAPLAN, 2007; HEYMANN, 2003); b) a matemática promove o aumento da produtividade individual e coletiva e estimula o crescimento econômico das sociedades (JAMISON, JAMISON; HANUSHEK, 2007); c) a matemática altera nossas percepções de risco e comportamentos saudáveis, o que afeta tratamentos médicos e resultados de saúde (REYNA et al, 2009); d) a matemática influencia nossas decisões financeiras (LUSARDI; MITCHELL, 2014); e) a matemática pode produzir sociedades mais iguais, reduzindo diferenças salariais por gênero[1] (OLINTO, 2011); f) a matemática pode contribuir para produzir sociedades menos violentas[2] (PARRAT-DAYAN, 2008; HECKMAN; RUBINSTEIN, 2001); g) a matemática é necessária para que as pessoas entendam as notícias cotidianas (BOALER, 2008); e h) a matemática é fundamental para o desenvolvimento tecnológico dos países (UNESCO, 2012).

Em termos mais cotidianos, podemos dizer que, sem a matemática, as pessoas não são capazes de planejar o horário para sair de casa e chegar em um compromisso, não conseguem calcular o troco em uma compra no supermercado, não são capazes de decidir se compram um produto à vista ou em parcelas, não sabem se é ou não vantajoso tomar um empréstimo, tampouco conseguem avaliar o impacto da inflação em suas vidas, não são capazes de decidir se vale a pena continuar no seu trabalho ou mudar de emprego, não sabem avaliar riscos e tomar decisões, como ir ao médico ou tomar uma vacina, ou mesmo entender o que dizem as notícias do dia. É preciso um conhecimento básico de matemática não somente para sobreviver, mas para ser um bom cidadão nas sociedades contemporâneas. Assim, podemos dizer que a importância da matemática para o desenvolvimento não pode ser exagerada. De fato, sem a matemática, não há desenvolvimento econômico e humano possíveis. Em resumo, sociedades sem matemática são sociedades nas quais a economia é fraca, com baixa produtividade, nas quais a ciência e a tecnologia são incipientes, nas quais as pessoas têm um baixo nível de alfabetização financeira, e nas quais os cidadãos não são capazes de entender questões de economia política que afetam suas vidas. Sociedades sem matemática são sociedades frágeis, violentas, desiguais e fragmentadas.

Muito se tem escrito sobre os desafios da educação matemática no Brasil, sobre como tornar a matemática uma peça-chave do desenvolvimento humano do país

1 Isso se deve ao fato de as mulheres evitarem carreiras com matemática, que em geral pagam melhores salários. São as chamadas profissões STEM (do inglês *science, technology, engineering and mathematics*).
2 Parrat-Dayan argumenta que uma das causas da indisciplina e da violência nas escolas é a alienação promovida por matérias com alta normatividade. Segundo ela (PARRAT-DAYAN, 2008, p. 63), "a normatividade de uma disciplina significa se submeter a uma característica que, uma vez aceita, dá poder e liberta". No entanto, os estudantes confundem *normatividade* e *normalização*. No caso da matemática tradicional, essa submissão significa um alto poder dos professores, que não é aceito em sociedades pós-modernas nas quais ocorreu uma perda dos efeitos estruturantes da obrigação, o que pode causar conflitos – ou não, de acordo com a forma como é ensinada.

– duas referências-chave são Valente (2012) e Muniz (2013). Parte dessa discussão tem enfocado as práticas pedagógicas, como ilustrado por Paiva e Sá (2011) ou Ferreira e Buriasco (2015), para citar apenas alguns exemplos, procurando ir além do mapeamento de problemas rumo a soluções pedagógicas concretas para os desafios da educação matemática brasileira. Nesse sentido, o presente trabalho segue a linha da discussão estabelecida por d'Ambrosio (1996), ao explorar a experiência do Círculo da Matemática do Brasil como uma fonte de reflexões práticas sobre práticas pedagógicas com impactos positivos.

Nesse contexto, este trabalho está dividido em três partes. Na primeira, é introduzida a abordagem pedagógica do Círculo, como desenvolvida por Bob e Ellen Kaplan, fundadores do *Math Circle* na Universidade de Harvard (EUA), e líderes do Círculo da Matemática do Brasil. Em seguida, são apresentados os resultados de uma avaliação de impacto realizada com as atividades do Círculo do Brasil durante o ano de 2014. Por fim, esses resultados são discutidos à luz do debate pedagógico contemporâneo, com destaque para aspectos referentes ao ensino da matemática. O argumento central desenvolvido neste trabalho é o de que o ensino da matemática pode melhorar a partir de novas abordagens como as do Círculo. É importante enfatizar que não se assume, em nenhum momento, que apenas abordagens com essas características têm êxito. Pelo contrário, trabalha-se com a perspectiva do *pluralismo metodológico*, segundo a qual diversas abordagens podem ser bem-sucedidas em contextos diferentes. O Círculo da Matemática é, assim, apenas uma entre inúmeras abordagens que podem ser utilizadas para a melhora tão necessária do ensino da matemática no país.

A abordagem do Círculo da Matemática

Uma *abordagem* não é um *método*. Um método é como uma receita de bolo: primeiro misture a farinha, depois adicione os ovos etc. Por outro lado, uma abordagem é um conjunto de princípios ou conselhos a serem utilizados conforme a discrição de quem a adota. Que diferença isso faz? A principal diferença é que a abordagem respeita a *autonomia* de quem a utiliza, sem querer decidir sobre no que e quando deve ser utilizada. Dentro da ideia de abordagem, há um grau elevado de respeito à diversidade humana e à complexidade de situações que normalmente é mais alto do que o encontrado na aplicação de métodos – que frequentemente independem de contextos e circunstâncias de utilização. Com isso, o conceito de *abordagem* é essencial para se entender a contribuição pedagógica de Bob e Ellen Kaplan, desenvolvida ao longo de mais de 30 anos de experiência no ensino da matemática.

A abordagem dos professores Kaplan é explicada de maneira sistematizada no seu livro clássico "Out of the labyrinth: setting mathematics free" (KAPLAN; KAPLAN, 2007) – que pode ser traduzido como "Fora do labirinto: libertando a matemática" –, em especial em seu Capítulo 8. A sua abordagem tem dois pilares centrais: a ideia de que a matemática não deve ser imposta, mas *descoberta* pelas crianças, e o entendimento de que o conteúdo matemático – pensado como estruturas de descoberta do mundo – floresce em um contexto prazeroso e amigável. Para os autores, é natural que o impulso para a matemática surja em casos particulares, mas, para o raciocínio matemático, é natural que caminhemos na direção do abstrato, que carrega consigo o poder da generalização.

Bob e Ellen Kaplan estiveram no Brasil em 2013 para a primeiro oficina de capacitação de educadores selecionados para o Círculo da Matemática no país. Nesse encontro, depois de muita discussão com os educadores, foi elaborada uma estrutura para a abordagem, que pode ser sistematizada e fundamentada em sete pontos-chave, que são aqui apresentados e examinados:

1. O perguntar e o escutar incessantes

O conceito de "círculo" representa, antes de mais nada, um ideal de comunicação sem hierarquias, no qual as pessoas aprendem a florescer por meio da *cooperação*. De certo modo, esse se tornou um desafio das sociedades contemporâneas, nas quais a habilidade de comunicar é entendida como "falar", ao invés de "escutar". O Círculo trabalha o desenvolvimento de um conjunto de habilidades pouco valorizadas, mas não menos importantes, como o "ouvir", o "interpretar o outro", o "interagir com o outro" e o "construir com o outro". Pode-se dizer que, no Círculo, a "cooperação se torna uma experiência merecida" (SENNETT, 2012, p. 13). O escutar é, assim, transformado em um instrumento pedagógico. Como abordagem, o Círculo sugere que o perguntar e o escutar são instrumentos fundamentais para o estabelecimento da comunicação entre as pessoas. Habilidades comunicativas são essenciais para a promoção não somente da razão individual, mas também da razão pública. Como destaca Kamii: "O julgamento moral e o pensamento lógico desenvolvem-se juntamente quando as crianças são encorajadas a discutir a desejabilidade ou justificabilidade de uma decisão" (KAMII, 1992, p. 46).

Desse modo, habilidades não cognitivas são transferíveis aos estudantes por meio da sua consolidação como práticas na sala de aula. E é assim, por meio da força do hábito, que ficam estabelecidos protocolos de ação cooperativos e construtivos (DUHIGG, 2012).

O perguntar do professor é, assim, muito mais do que um instrumento pedagógico: é o estabelecimento de uma rotina de pensamento e tolerância, fundamental para uma atitude cooperativa nas diferentes esferas sociais vivenciadas pelos estudantes. Essa atitude cooperativa apresenta o potencial de romper a dependência hierárquica que os estudantes têm da autoridade de um adulto, promovendo a sua *autonomia* (KAMII, 1992; COMIM et al, 2011).

2. O reconhecimento dos estudantes

Na sala de aula, nem sempre é fácil reconhecer os estudantes como indivíduos. É comum que haja professores atarefados, com várias turmas e turmas muito grandes, que terminam o ano escolar sem saber o nome de seus estudantes, ou que fazem a chamada segundo algum número particular dos estudantes, como o número de matrícula. Como descrito pela filósofa espanhola Adela Cortina (2007), o estabelecimento de vínculos entre as pessoas depende do reconhecimento de sua dignidade, que começa com a apreciação de suas particularidades pelos demais. É isso que as torna humanas e dignas de atenção em relação aos outros. Quando o professor trata os estudantes com indiferença, o vínculo comunicativo entre eles é rompido, e a semente da violência é lançada em solo fértil. Diferentemente, o Círculo começa dando voz aos estudantes e, com isso, propicia não somente o fortalecimento da autonomia – e da intuição – das crianças, de modo geral, mas também do seu reconhecimento como indivíduos. Ao promover a interação das crianças, essa abordagem estimula o reconhecimento mútuo. Autores como Honneth (1995) mostram como a construção de relações de amor e amizade ajudam na construção do ego e promovem a autoestima entre os indivíduos. É importante notar como a questão do reconhecimento, apesar de próxima, é distinta das questões do perguntar e do escutar contínuos, pois as crianças poderiam ser perguntadas sem o reconhecimento de sua individualidade.

3. O lúdico e o divertido

Começar uma aula de matemática com um bom problema é fundamental para deixar a imaginação voar. O impacto da diversão não se resume à motivação individual – por meio da qual as crianças encontram prazer na realização de uma atividade por si só, e não por qualquer valor instrumental –, mas se amplia ao coletivo. Como argumentam os professores Kaplan: "Essa diversão une os viajantes e o mundo que eles exploram" (KAPLAN; KAPLAN, 2007, p 183). A diversão alimenta a camaradagem e o otimismo entre as crianças. O *lúdico*, visto como brincadeira, é fundamental para o desenvolvimento infantil. É interessante notar que o tipo de "brincadeira cooperativa" proposta pelo

Círculo da Matemática é, segundo um dos mais tradicionais estudos da psicologia (PARTEN, 1932), a forma mais complexa entre vários tipos de brincadeira, com efeitos claros sobre não somente o desenvolvimento cognitivo das crianças, mas sobre o seu desenvolvimento social (KEENAN; EVANS, 2009). Portanto, de modo resumido, pode-se dizer que trabalhar um material divertido é importante não apenas para a motivação individual dos estudantes, mas também para a promoção de um ambiente cooperativo. Não é necessário que o professor venha com tudo preparado. Às vezes, começar a aula conversando sobre o personagem favorito de um estudante, aproveitando-o na aula, é uma maneira de reconhecimento da individualidade desse estudante, assim como um modo de dar-lhe voz e de usar sua imaginação a favor da matemática.

4. O erro

Uma aula de matemática pode ser um dos piores momentos da vida de uma pessoa. Ela pode se sentir burra por não entender o que o professor diz; pode sentir que vale pouco por ser burra. Essa baixa autoestima pode levar a uma situação de desconforto, de erosão da autonomia, que pode ocasionar um clima de medo e – por que não dizer – "pavor" e ansiedade e, até mesmo, a situações de conflito. Tudo começa com a ideia, em uma aula de matemática, de que existe uma *resposta correta*, e que as demais estão *erradas*. Para os professores Kaplan, esse pensamento, além de equivocado, é pernicioso. Ele caracteriza uma visão estereotipada da matemática, segundo a qual esta é uma "estrada estreita e inclinada na qual estar errado por pouco é estar de todo errado e na qual suas verdades de alta-altitude não se importam com nossas fraquezas" (KAPLAN; KAPLAN, 2007, p. 18).

Diferentemente, na abordagem do Círculo da Matemática, errar é bom, pois dá vazão à participação dos estudantes e coloca em marcha o motor do pensamento matemático, que é o *pensar* e o *questionar*, buscando razões que justifiquem os argumentos. Errar juntos faz com que o estigma do erro desapareça, o que cria uma atmosfera de confiança entre os estudantes. A pedagogia do Círculo questiona, assim, o "mito do talento", de que algumas crianças são especialmente dotadas de inteligência, enquanto outras não o são, considerando o erro como evidência do pensar, e não o seu contrário.

A principal implicação prática da *desmistificação pedagógica do erro* é que este pode ser utilizado pedagogicamente como instrumento de organização do pensamento dos estudantes. De fato, respostas "muito erradas" podem ser muito boas como pontos de partida úteis para os estudantes. O que está por trás disso é um pensamento quase revolucionário, de que o principal objetivo da educação deve ser a promoção não do

conhecimento – nem de habilidades de produção de conhecimento –, mas da própria *inteligência* ou *inteligências* (cognitiva e não cognitiva) dos seres humanos. Errar não é apenas humano: é o que nos faz humanos em busca de nossas razões e emoções.

5. Estratégias inclusivas

A abordagem do Círculo segue o princípio de "chão de fábrica", preocupando-se não apenas com a grande arquitetura das ideias, mas com sua implementação no cotidiano das salas de aula. De que adiantam grandes ideias, se não tivermos instrumentos para implementá-las? Essa não é uma questão apenas educacional, mas uma questão mais geral de política pública, na qual uma discussão das ações menores e dos detalhes práticos parece ser vista como menos importante por seus formuladores (HILL, 2006). Segundo a abordagem do Círculo, nada é mais equivocado do que essa ideia, que, por exemplo, no campo da educação leva a uma ênfase teórica na formação dos professores às custas de uma formação prática que "ensine os professores a ensinar", incluindo a gestão de sala de aula, o enfrentamento de problemas de indisciplina e estratégias inclusivas, como, por exemplo, a gestão da lousa.

Como notam os professores Kaplan:

> As crianças são mestres em ler sinais subliminares: a sua mão [do professor] movendo em direção à lousa à medida que as ideias deles se aproximam ao que você tem em mente; o meio sorriso, a meia franzida de sobrancelha que revela o que você pensa de seus esforços (KAPLAN; KAPLAN, 2007, p. 208).

Desse modo, o professor deve tentar, como estratégia de inclusão, o "entusiasmo uniforme" ou a neutralidade, para fazer com que as respostas dos estudantes sejam um jogo de adivinhação não do que o professor sabe, mas sim da descoberta da matemática. Esse princípio é muito importante na gestão da lousa, por meio da qual, segundo a abordagem do Círculo da Matemática, deve-se registrar todas as respostas das crianças, por uma questão de respeito a elas. Em outras palavras, a lousa não é somente do professor – é também das crianças. Em termos pedagógicos, a lousa deve registrar de modo orgânico a sequência do raciocínio desenvolvido, incluindo não apenas as respostas erradas, mas também as certas. O quadro pode parecer bagunçado dessa forma, mas o mais importante é que tenha uma lógica.

Em ambientes muito violentos, é comum encontrarmos estudantes que se recusam de todo a participar da aula. Como explica Parrat-Dayan (2008), a utilização excessiva de ordens e prescrições – o que pode acontecer em uma aula de matemática tradicional

– também pode gerar tensões e desordem. No entanto, essa autora sugere ações *ad hoc* para restabelecer a ordem na aula, como "colocar o dedo diante da boca para pedir silêncio", ou "se aproximar calmamente de um aluno e pedir para retomar seu trabalho", ou ainda utilizar "o humor" (PARRAT-DAYAN, 2008, p. 64). A abordagem do Círculo da Matemática trata a questão da inclusão e da participação dos estudantes como um ponto estrutural na sua pedagogia.

6. Sequências pedagógicas

A abordagem do Círculo trabalha com o conceito de uma sequência pedagógica "não particular", que se inicia com a intuição das crianças e que utiliza o perguntar e o escutar incessantes como meio de inclusão e estímulo dos estudantes. Nesse processo, o trabalho do professor é o de ser um gestor de ideias, procurando articulá-las e simplificá-las como meio de facilitar a comunicação entre os estudantes – lembrando que as respostas devem partir das próprias crianças. Uma vez que esse processo, que às vezes pode ser longo, esteja chegando próximo do fim, é importante que o professor retome o caminho lógico que foi utilizado para se chegar ao resultado. Como diria Sen (2002), os resultados devem ser avaliados não apenas por seus elementos "finalísticos" – ou seja, resultados finais mensurados, nesse caso, em termos de aprendizagem –, mas também por seus elementos "abrangentes" – que, além dos resultados finais, incluem os processos que levaram a esses resultados. Isso quer dizer que têm valor não apenas *o que* se sabe, mas também *o modo* como o conhecimento é construído. Da mesma forma, isso significa que a prioridade do professor não deve ser simplesmente passar pelos materiais.

É claro que existem currículos mínimos a serem cumpridos, mas os professores não devem ser escravos dos conteúdos. Deve-se enfocar a qualidade do processo que o professor está construindo. Por essa razão, somente depois que os conteúdos foram apropriados pelos estudantes é que eles devem ser formalizados. A formalização se torna necessária a partir do momento em que, sem o rigor, a discussão pode se tornar demasiadamente solta. A formalização nunca deveria matar a discussão. Infelizmente, no ensino tradicional da matemática, existe uma cultura de se começar com a formalização (LOCKHART, 2009), o que mina a autonomia dos estudantes. A abordagem do Círculo defende que não existe uma sequência pedagógica única apropriada para o ensino da matemática, mas que existem várias, cada uma adaptada segundo o discernimento do professor, de acordo com as características do seu grupo. Porém, como abordagem, defende que o docente deve iniciar seu trabalho com o uso da intuição dos estudantes, respeitando processos inclusivos, não se deixando escravizar pelos conteúdos e postergando a formalização para quando ela for mais útil.

7. A matemática

A abordagem do Círculo está estruturada em torno de um conjunto de problemas matemáticos, que representam possibilidades de vivências e práticas matemáticas. Para começar, para que possam ser objetos de discussão, os problemas devem ser acessíveis. Isso quer dizer que cabe ao professor ajustar o nível de dificuldade das questões matemáticas às habilidades prévias de seus estudantes. Uma questão muito fácil pode simplesmente não ser interessante para eles. Uma questão muito difícil pode significar que o professor vai acabar fazendo o trabalho para os estudantes, tendo de dizer coisas que eles ainda não estão preparados para descobrir. Além disso, os problemas matemáticos escolhidos devem saber combinar, como dizem os professores Kaplan, "dois cones infinitos: um que se abre para cima em direção às conjecturas e outro que se abre em direção aos fundamentos" (KAPLAN; KAPLAN, 2007, p. 177). Eles chamam esses problemas de "mistérios acessíveis", que são suficientemente imprecisos para que os estudantes sejam capazes de desenvolver habilidades cruciais para torná-los precisos, dentro do processo de tentar resolvê-los.

Os professores Kaplan defendem a proposta de um currículo flexível, mas estratificam os elementos curriculares em três faixas etárias principais: de 5 a 8 anos, de 9 a 13 anos, e de 14 a 18 anos – ou mais. Na primeira faixa, incluem problemas como: "existem números entre números?", "máquinas de funções", "o relógio", "frações e decimais", "tipos de números", "números primos", "algoritmos euclidianos", "qual é a área?", entre outros. Na segunda faixa, podemos incluir conteúdos como: "cálculo com mínimos e máximos", "números complexos", "figuras convexas", "teoria dos jogos", "pontos interessantes em triângulos", "logaritmos", "triângulo de Pascal", a "sequência de Fibonacci", "provas visuais", entre outros. É interessante perceber o grau de sofisticação matemática de algumas dessas sugestões trabalhadas em uma estrutura pedagógica que não se mantém presa a grades curriculares. Isso mostra que a matemática é composta por um misto de *intuição* e *rigor*, e que propostas pedagógicas centradas na obediência rígida a currículos podem não ser garantia de avanço na disciplina.

A abordagem do Círculo da Matemática é organizada em função desses princípios pedagógicos. Porém, essa abordagem não seria fundamentada em princípios tão gerais que poderiam ser aplicados a quaisquer outras disciplinas? O que existe de especial na abordagem do Círculo para o ensino da matemática? Como nos mostra Kamii (1992), o ensino da matemática traz consigo um conjunto de questões pedagógicas particulares, muitas delas discutidas originalmente por Piaget (1948). Por exemplo, o problema do

bloqueio emocional que muitos estudantes desenvolvem em relação à matemática, tratado pelos professores Kaplan, foi originalmente discutido por Piaget (1948). Ele começa descontruindo o mito, também questionado pelos professores Kaplan, de que existem crianças brilhantes em matemática ou em física – um problema que não parece ser extensivo a todas disciplinas. A questão comunicativa, trabalhada pelos professores Kaplan, também pode ser vista como uma resposta ao problema, apontado por Piaget, do abismo que surge pelo uso de uma linguagem pronta e abstrata na matemática, que é muito diferente da linguagem utilizada pelas crianças. A peculiaridade da matemática, segundo Piaget é que "[ela] é nada mais do que lógica" e "um fracasso na matemática significa uma falta naqueles mecanismos de desenvolvimento do intelecto" (PIAGET, 1948, p. 96). No entanto, Piaget – assim como os professores Kaplan –, apesar de reconhecer a prevalência dessa interpretação, discorda dela e vê na *construção psicológica do conhecimento matemático* o segredo de seu sucesso. Como ele argumenta,

> cada estudante normal é capaz de um bom raciocínio matemático se sua atenção for direcionada às atividades do seu interesse, e se por este método as inibições emocionais que frequentemente lhe dão um sentimento de inferioridade em lições nessa área [matemática] forem removidas (PIAGET, 1948, p. 98-99).

Segundo Piaget, nenhum outro campo do conhecimento é tão sensível a esse conjunto de questões como a matemática, devido à percepção geral do impacto que tem na formação da lógica e da razão humanas (PIAGET, 1948, p. 105).

O que está em jogo no ensino da matemática é mais do que o conhecimento da matemática *per se*, mas um eixo importante da formação intelectual e humana dos indivíduos. Outras áreas, como a história ou mesmo as ciências, podem ser aprendidas de maneira não sequencial e a partir de estruturas lógicas *ad hoc*. Isso ocorre de forma diferente com a matemática e, por isso, a abordagem do Círculo, mesmo que parcialmente utilizável em outras áreas, é peculiar ao ensino desta disciplina, na qual se impõe uma gama idiossincrática de problemas. Não menos importante é o fato de a abordagem proposta pelo Círculo ser caracterizada por um conjunto de práticas e vivências essencialmente matemáticas, que não podem ser transportadas de forma automática para outras áreas. Outra questão diz respeito ao potencial de aplicação e implementação dessa abordagem em um país como o Brasil, tópico abordado a seguir.

Da abordagem à prática

O Círculo da Matemática do Brasil, projeto do Instituto TIM, foi criado em 2013, com a participação de Bob e Ellen Kaplan, para dar materialidade à sua abordagem no contexto de um país em desenvolvimento onde o ensino da matemática tem tio resultados aquém do desejado. Para tal, ele foi concebido em uma escala de operação muito mais ampla do que a original, realizada na Universidade de Harvard. Adicionalmente, a proposta pedagógica foi de apropriação da abordagem por educadores brasileiros, de todas as regiões do país, capacitados diretamente pelos professores Kaplan. Durante o ano de 2014, foi realizada uma avaliação de impacto do Círculo, que acompanhou 7.912 estudantes de 67 escolas de 10 cidades brasileiras que receberam aulas ministradas pelos 62 educadores capacitados por Bob e Ellen. No total, foram ministradas 14.166 aulas, cada uma de uma hora de duração por semana.

Foi elaborado um *índice de competências matemáticas* (ICM), composto por respostas a 13 questões formuladas por Bob e Ellen Kaplan. Entre as competências testadas pelo índice, estão: a) a distinção valor-lugar; b) o uso de escalas numéricas; c) o conhecimento espacial; d) habilidades de contar; e e) o julgamento e a imaginação matemática. O teste, que apresenta uma intersecção com a Provinha Brasil em certas áreas, enfocou os quatro primeiros anos do ensino fundamental.

O trabalho principal de uma avaliação de impacto de uma intervenção qualquer consiste em responder a questões de causa e efeito. Para tal, é preciso isolar mudanças no resultado que sejam diretamente atribuíveis a essa intervenção específica (GERTLER et al, 2012).[3] Não existem métodos fáceis para resolver esse problema da atribuição, pois eles envolvem a escolha de um contrafatual, qual seja, a comparação do resultado atingido com o que teria acontecido com o mesmo indivíduo ou grupo de indivíduos, caso ele ou eles não tivessem participado da intervenção (ANGRIST; PISCHKE, 2009). Para que esse exercício seja possível, são eleitos grupos de tratamento – no caso, os estudantes que participaram do Círculo em 2014 – e de controle – crianças que não participaram do Círculo, mas com um perfil socioeconômico semelhante e que vivem em circunstâncias parecidas –, e são tiradas duas medidas, uma inicial e outra final, para que o impacto seja avaliado por meio de uma medida de evolução relativa entre os grupos. Não é o propósito aqui realizar uma discussão econométrica dos resultados encontrados. No entanto, parece suficiente esclarecer que foi utilizado um modelo de "diferenças em diferenças", a partir de dados descritos em formato de painel

3 Não fazer isso significa alternativamente estimar impactos que podem conter vieses de especificação do modelo utilizado para avaliar os resultados, ou problemas de seleção da amostra, como explicam Angrist e Pischke (2009).

(WOOLDRIDGE, 2010, cap. 10). Foram realizadas duas rodadas – uma em março, outra em novembro de 2014 – de entrevistas com 6.008 estudantes, com idade média de 8,7 anos, nas quais 49,4% eram meninas e 50,6% eram meninos. Também foram aplicados dois questionários extras: um com os professores das crianças, e outro sobre práticas parentais e informações socioeconômicas das famílias.

Os resultados estimados levaram em conta o gênero e a idade das crianças, se os professores eram homens ou mulheres, a nota das crianças em matemática no ano anterior, se suas casas eram feitas de tijolos, quantas pessoas dormiam no lugar onde elas dormiam, quantos quartos havia em suas casas, se os estudantes eram participantes do programa Bolsa Família – como uma *proxy* para identificar os estudantes mais pobres –, se eram disciplinados ou indisciplinados, se acreditavam que suas mães ou pais gostavam de matemática, se um destes ajudava no tema de casa, se tinham hora para ir para cama, se alguém lia para eles antes de dormir, tudo isso juntamente com a variável principal, que era a participação ou não deles no Círculo da Matemática.

Foram estimadas regressões usando como variável dependente a variação do desempenho das crianças no ICM, em termos absolutos e em desvio-padrão. Os resultados foram consistentes para todas as estimações, o que mostrou um efeito sempre estatisticamente significativo e positivo para a participação dos estudantes no Círculo da Matemática. O projeto não teve um impacto diferenciado de acordo com o gênero dos participantes, mas mostrou ter seu retorno máximo entre crianças com 8 e 9 anos de idade – sendo decrescente a partir disso –, como previsto pelo modelo de Cunha e Heckman (2007). Os resultados foram mais altos quando os professores de matemática eram do sexo masculino – talvez por questões de estereótipo, que serão discutidas na sequência. As notas de 2013 em matemática também foram previsores consistentes do desempenho dos estudantes no ICM aplicado em 2014, o que ilustra o caráter de dependência temporal da matemática. Por outro lado, as variáveis de cunho socioeconômico variaram segundo a especificação do modelo utilizado. Com a introdução de variáveis familiares, algumas variáveis socioeconômicas deixaram de ter efeito, como o número de pessoas que dormem por peça/quarto.

No entanto, todas as variáveis socioeconômicas, quando significativas, tiveram um impacto negativo sobre o desempenho dos estudantes em matemática, mensurado pelo ICM. Isso reforça o efeito robusto mensurado pela participação das crianças no Bolsa Família. A pobreza é um fator decisivo do baixo desempenho das crianças na matemática. Em estimativas realizadas com o uso da taxa de retorno da participação das crianças no Círculo em termos percentuais, notou-se que o efeito *pobreza* compensa todo o efeito

positivo médio do impacto do Círculo que, em 2014, estava na faixa de 7,3%. Essa é a mesma ordem de magnitude para a qual a indisciplina dos estudantes contribui – negativamente. Por outro lado, considerando que um ano a mais na escola confere, em média, um retorno 23% maior no ICM, é considerável que aulas de uma hora por semana do Círculo possam ser equivalentes a quase 1/3 do retorno total da escola.

As evidências encontradas ao longo dessa e de outras avaliações do Círculo sugerem que existe um "círculo virtuoso" potencial entre o desempenho dos estudantes em matemática e o gosto que eles têm pela matéria. Esse vínculo é um elemento dinâmico poderoso, mas que, muitas vezes, é contrabalançado pela entropia que surge com o passar do tempo: com a idade, diminui a percepção da criança de que sua mãe ou alguém da família gosta de matemática; diminui a ajuda que as crianças recebem dentro de casa para estudar ou a probabilidade de que alguém leia uma história para elas; diminui a aplicação de regras dentro de casa, como ter hora para dormir; por fim, diminui o percentual daqueles que têm uma boa opinião sobre a matemática. Desse modo, as evidências sugerem que este é um período crucial no qual as intervenções, tanto na família quanto na escola, têm mais êxito (MACANA; COMIM, 2015).

Porém, o que define o quanto as crianças gostam de matemática? Vários fatores influenciam esse gosto, os quais podem, pedagogicamente, ser divididos em dois grupos: os fatores positivos e os negativos. Do lado dos *fatores positivos*, com base na evidência fornecida pela avaliação de impacto do Círculo, podemos dizer que as crianças gostam mais de matemática quando têm a percepção de que suas mães também gostam, quando alguém lê histórias para elas e quando elas vão bem em matemática na escola. É interessante notar como certas variáveis familiares são responsáveis por esse desempenho escolar satisfatório na matemática. Esses são fatores possivelmente retroalimentadores. Do lado dos *fatores negativos*, encontramos que as crianças que gostam menos da matemática são aquelas que estão em séries mais altas, assim como as do sexo feminino – o que reflete a construção de um viés de gênero típico na disciplina – e as mais indisciplinadas.

Uma breve análise descritiva das estatísticas encontradas com as crianças em maior estado de vulnerabilidade – medido por sua participação no programa Bolsa Família – mostrou que elas tinham uma média 36% mais baixa de percepção de que suas mães gostavam de matemática, uma média 18% mais baixa de alguém que lê histórias para elas, uma média 41% mais baixa de alguém que as ajuda a estudar e uma média 27% mais baixa de não ter regras em casa. É evidente que a pobreza é um fator de desorganização da vida das famílias. Mais do que não ter o que comer ou ser

privado de capacitações básicas, percebe-se na pobreza um fator de disfuncionalidade organizacional, com repercussões muito negativas no desempenho escolar das crianças. Apesar disso, não foi encontrada uma relação entre a pobreza e o gosto pela matemática, o que sugere que mesmo famílias mais pobres podem incentivar seus filhos a gostarem de matemática. A pobreza não é uma condenação, mas apenas uma restrição séria que precisa ser atacada, assim como outras encontradas nesse estudo, como a discriminação de gênero. Os resultados encontrados mostram que a participação das crianças no Círculo constitui um fator estatisticamente robusto do seu desenvolvimento matemático, mas outros fatores igualmente poderosos – quantitativamente falando – não deixam de existir.

Na última parte deste trabalho, propõe-se uma combinação de aspectos teóricos, fundamentados na abordagem do Círculo, e empíricos, com base nos resultados de sua avaliação de impacto, para realizar uma reflexão sobre as questões a serem enfrentadas pelo ensino da matemática no Brasil e sobre como o Círculo pode contribuir positivamente para soluções alternativas.

Razões e reflexões sobre a abordagem e a prática

Em outubro de 2014, o Instituto TIM promoveu um *webinar* na Universidade de Harvard para discutir a relação entre a matemática e o desenvolvimento humano, com o professor Amartya Sen (Prêmio Nobel de Economia) e os professores Kaplan. O objetivo foi o de estabelecer *links* entre os princípios pedagógicos da abordagem do Círculo da Matemática e as características de desenvolvimento humano, como trabalhadas por Sen. Entre os pontos examinados, ficou claro que há muito da abordagem de desenvolvimento humano na pedagogia do Círculo, como o respeito aos direitos e à liberdade individual das crianças, a importância de se respeitar a autonomia dos professores, o reconhecimento do processo de aprendizagem como um processo de construção coletiva, a ênfase na tolerância na sala de aula e o estimulo à razão pública, a centralidade estratégica do investimento no fator humano e a luta por um mundo sem discriminações, sejam estas de qualquer tipo. Esses elementos comuns também são corroborados por uma ampla literatura internacional que discute a educação matemática e seus desafios, e que merece ser brevemente examinada em seus aspectos principais, à luz do debate sobre a contribuição do Círculo para o ensino da matemática no Brasil.

A cultura, ou melhor dizendo, a *obsessão com a cultura* do "ensinar para o teste", que tem dominado o debate das políticas educacionais nas últimas décadas, tem sido fundamentada em estratégias de padronização do ensino, de estímulo à competição entre os indivíduos e de corporatização das atividades educacionais, as quais têm se mostrado altamente contraproducentes (ROBINSON; ARONICA, 2015). Isso tem levado muitos professores a pensarem que o seu trabalho é classificatório, mais do que emancipatório. Como explica Boaler:

> Demasiados professores de matemática pensam que o seu papel é encontrar os poucos escolhidos que são realmente bons em matemática, alocando os demais para grupos de baixo nível e dando a eles trabalhos de baixo nível para o resto de suas vidas escolares (BOALER, 2009, p. 32).

Isso acontece quando os professores tratam as classes de modo padronizado, sem reconhecer que cada estudantes tem suas características e tempos particulares de aprendizado.

Por outro lado, a proposta pedagógica do Círculo, fundamentada no reconhecimento da diversidade humana e de sua autonomia, é contrária ao modo competitivo e padronizado pelo qual a educação tem sido estruturada, como se fosse uma fábrica na qual entram insumos e da qual saem produtos. A desconsideração do *elemento humano* na sala de aula é um fator de atraso na educação (ANDREWS; SAYERS, 2005), que é recuperado pela abordagem pedagógica do Círculo da Matemática.

O balanço entre uma experiência individual e coletiva, na qual o fazer matemática seja algo divertido para todos, é um fundamento pedagógico chave na abordagem do Círculo da Matemática, que faz com que o gosto pela matemática seja estimulado nas aulas. A importância dessa característica pedagógica foi reconhecida pela UNESCO, que notou que

> a educação matemática de qualidade deve permitir aos estudantes que formem uma imagem positiva e apropriada da matemática. [...] Tal educação deve possibilitar à matemática ser tanto uma experiência de vida individual como coletiva e ao valor da comunicação e da troca com os outros ser percebido (UNESCO, 2012, p. 10-11).

A avaliação empírica do Círculo da Matemática corrobora essa afirmação da UNESCO, mostrando que as crianças que participam do projeto, que são expostas a essa experiência de construção coletiva da matemática, têm uma opinião muito

alta sobre o valor da matemática em sua vida – e são também aquelas que gostam muito da matéria.

O combate ao estigma do erro na sala de aula, promovido pela pedagogia do Círculo, é estratégico no enfrentamento aos problemas da "ansiedade matemática" (MALONEY et al, 2013) e da "ameaça do estereótipo" (McCORMACK, 2014). É interessante notar o alcance da questão da ansiedade matemática, que impõe uma carga cognitiva real adicional aos problemas matemáticos, quando as pessoas são expostas a eles. Em linhas muito simples, o que acontece é que as crianças – embora isso também ocorra na vida adulta – tem a sua "memória de trabalho" comprometida ao pensarem em como são ruins em matemática, ou em como não irão bem naquela prova em particular, com o consequente resultado de que não vão bem mesmo, porque seus pensamentos e recursos de memória acabam sendo dominados pela ansiedade (BEILOCK; RYDELL; McCONNELL, 2007).

É quase inacreditável ver como a ameaça do estereótipo pode ser induzida nas crianças, simplesmente ao se pedir que elas identifiquem seu gênero ou suas etnia antes de começarem a fazer uma prova (STRICKER; WARD, 2004). Por essa razão, abordagens pedagógicas como a do Círculo, que tornam a resolução de um problema matemático uma tarefa coletiva, têm o potencial de reduzir, ou mesmo eliminar, tanto a ansiedade matemática como a ameaça de estereótipo do processo em questão, dessa forma libertando as crianças de suas chagas emocionais. A pedagogia do Círculo dificulta qualquer comportamento que seja condescendente para com as crianças. Encontramos aqui um contexto no qual podemos aplicar uma das máximas que sempre são ditas por Bob Kaplan, de que "a matemática é liberdade". Podemos dizer que sua lógica pedagógica colabora para a libertação das crianças de ameaças de estereótipo e da ansiedade matemática, pela simples razão de se tratar a matemática como um *desafio coletivo*. Entre os itens da "coreografia do ensino" do Círculo da Matemática, encontramos o princípio de nunca elogiar diretamente as crianças quando elas acertam, mas sim a sua *participação*, deixando o elogio somente para quando toda a turma acerta a questão (INSTITUTO TIM, 2014).

A pedagogia do Círculo questiona o dogma de que a habilidade matemática das crianças é fixa, trabalhando elementos lúdicos e comunicativos que são motivadores para elas. Desse modo, em sintonia com o estudo de Hanline, Milton e Phelps (2008), busca no engajamento ativo das crianças a promoção do aprendizado. A pedagogia do Círculo, fundamentada em uma estratégia didática positiva de engajar as crianças com brincadeiras imaginativas, é coerente com a argumentação de Vygotsky (1967),

que mostrou como a brincadeira pode estimular a habilidade das crianças no desenvolvimento do pensamento abstrato, fundamental para o desenvolvimento das habilidades matemáticas. A combinação dos elementos lúdicos e comunicativos na pedagogia do Círculo faz com que restrições individuais – como no caso da ansiedade e do estereótipo –, assim como coletivas, sejam potencialmente removidas, o que sugere, como já o fizeram Boylan e Povey (2014), que melhores resultados são conquistados quando as crianças compartilham a crença de que a habilidade matemática não é um atributo fixo dos indivíduos.

O objetivo pedagógico do Círculo é o desenvolvimento humano das crianças, e não apenas o "abastecimento" delas com conhecimento. Com isso, o Círculo trava uma batalha silenciosa contra um ensino da matemática excessivamente formalizado, fundamentado na obediência rígida a regras, procedimentos e "decoreba" – como a tabuada. Aulas tradicionais de matemática com base em fórmulas reduzem o estímulo a pensar dos estudantes, diminuindo o sentido daquilo que eles fazem, e frequentemente gerando incompreensão e frustração. De fato, muito do que vemos nas escolas públicas brasileiras é a prática de fornecer as respostas junto com as perguntas, sem dar às crianças e aos jovens a oportunidade de pensar sobre os conteúdos. Assim, quando as crianças aprendem geometria, elas são levadas ao cálculo de áreas e à memorização de fórmulas, ao invés de aprenderem o sentido da relação entre áreas por meio de perguntas que lhes são postas. A matemática, assim, é apresentada "morta" às crianças: não como um processo de descoberta, como defendem os professores Kaplan, no qual se pode "chutar", errar, conjecturar, argumentar, duvidar e discutir, mas como um caminho já sedimentado e fundamentado em um modelo de aprendizagem que impõe a memorização de conteúdos que, com frequência, não são devidamente discutidos.

Esse não é um problema apenas brasileiro. Drèze e Sen notam que, na Índia, "os métodos de ensino são frequentemente dominados por um aprendizado de 'decorebas' inconscientes, incluindo repetição – tipicamente sem entendimento – daquilo que foi dado e uma repetição sem fim de tabelas de multiplicação" (DRÈZE; SEM, 2013, p. 120). A triste realidade, no Brasil e em outros países, como relata a UNESCO, é que "a educação matemática básica é ainda frequentemente chata demais" (UNESCO, 2012, p. 21), por causa da ênfase na formalização e nas regras de memorização, o que mina a autonomia das crianças. A UNESCO alerta, no entanto, que práticas socioconstrutivistas não são suficientes e que os professores devem ocupar um novo papel de "guias e mediadores" (UNESCO, 2012, p. 22) – coincidentemente ou não, como defende a abordagem do Círculo da Matemática. Soluções práticas, como o uso de brincadeiras ou jogos, sem dúvida podem constituir uma ajuda valiosa no ensino da matemática, mas necessitam

ser complementadas por uma fundamentação pedagógica que discuta a razão de ser do *aprender a fazer matemática*.

Quando os professores Kaplan tratam, por exemplo, da questão do erro, eles estão de fato se unindo a uma importante discussão pedagógica que propõe que ensinar não é somente repetir o conhecimento, mas também e principalmente entender as diferentes fontes do erro. Como explicam Ball, Hill e Bass, "não é somente a análise do erro, mas é sobre a explicação das razões, o uso de representações, a escolha de exemplos e a sequência de *insights* matemáticos que são importantes para o aprendizado" (BALL; HILL; BASS, 2005, p. 20). Para ensinar, é preciso entender o porquê do *não aprender*. É preciso pensar juntos, considerar opções a partir da perspectiva de quem aprende, o que indubitavelmente demanda um exercício de alteridade que, muitas vezes, somente pode ser entendido como um *ato de amor*.

Conclusão

O propósito deste texto consistiu em examinar a estrutura da abordagem do Círculo da Matemática, primeiramente à luz de seus fundamentos pedagógicos e, posteriormente, com base nas evidências empíricas produzidas pela avaliação de impacto realizada com as atividades do Círculo do Brasil, em 2014. Em seguida, procurou-se explorar as implicações de certas características-chave do Círculo para se realizar uma reflexão sobre o ensino da matemática. Ao mesmo tempo, foi examinada a relação entre o ensino da matemática e o desenvolvimento humano, como pano de fundo para uma apreciação da relevância de pedagogias e iniciativas como as empreendidas pelo Instituto TIM, com o Círculo da Matemática do Brasil.

Bibliografia

ANDREWS, P.; SAYERS, J. How do teachers of mathematics teach? A four-way international comparison. *Research in Mathematics Education*, v. 7, n. 1, p. 139-158, 2005.

ANGRIST, J.; PISCHKE, J. *Mostly harmless econometrics*: an empiricist's companion. Princeton: Princeton University Press, 2009.

BALL, D.; HILL, H.; BASS, H. Knowing mathematics for teaching. *American Educator*, v. 29, n. 3, p. 14-46, 2005.

BALLER, S.; DUTTA, S.; LANVIN, B. (Eds.). *Global information technology report 2016*. Geneva: World Economic Forum, 2016.

BEILOCK, S.; RYDELL, R.; McCONNELL, A. Stereotype threat and working memory: mechanisms, alleviation, and spill over. *Journal of Experimental Psychology*, 332, p. 267-285, 2007.

BOALER, J. *The elephant in the classroom*: helping children learn and love maths. Londres: Souvenir Press, 2009.

BOALER, J. *What's math got to do with it?*: how parents and teachers can help children learn to love their least favorite subject. London: Penguin Books, 2008.

BOYLAN, M.; POVEY, H. Ability thinking. In: LESLIE, D.; MENDICK, H. *Debates in mathematics education*. London: Routledge, 2014. p. 7-16.

COMIM, F. et al. Introduction: theoretical foundations and the book's roadmap. In: BIGGERI, M.; BALLET, J.; COMIM, F. *Children and the capability approach*. London: Palgrave Macmillan, 2011.

CORTINA, A. *Ética de la razón cordial*: educar en la ciudadania en el siglo XXI. Oviedo: Ediciones Nobel, 2007.

CUNHA, F.; HECKMAN, J. The technology of skill formation. *AEA Papers and Proceedings*, v. 97, n. 2, p. 31-47, 2007.

D'AMBROSIO, Ubiratan. *Educação matemática*: da teoria à prática. Campinas, SP: Papirus, 1996.

DRÈZE, J.; SEN, A. *An uncertain glory*: India and its contradictions. London: Allen Lane, Penguin Books, 2013.

DUHIGG, C. *The power of habit*: why we do what we do in life and business. New York: Random House, 2012.

FERREIRA, P. E.; BURIASCO, R. L. Enunciados de tarefas de matemática baseados na perspectiva da educação matemática realista. *Boletim de Educação Matemática*, v. 29, n. 52, p. 452-472, 2015.

GERTLER, P. et al. *Impact evaluation in practice*. Washington, DC: the World Bank, 2011.

HANLINE, M.; MILTON, S.; PHELPS, P. A longitudinal study exploring the relationship of representational levels of three aspects of preschool sociodramatic play and early academic skills. *Journal of Research in Childhood Education*, v. 23, n. 1, p. 19-28, 2008.

HECKMAN, J.; RUBINSTEIN, Y. The importance of noncognitive skills: lessons from the GED Testing Program. *The American Economic Review*, v. 91, n. 2, p. 145-149, 2001.

HEYMANN, H. W. *Why teach mathematics?*: a focus on general education. London: Kluwer Academic Publishers, 2003.

HILL, M. Implementação: uma visão geral. In: SARAVIA, E.; FERRAREZI, E. (Orgs.) *Políticas públicas*. Brasília: ENAP, 2006. (Coletânea, v. 2).

HONNETH, A. *The struggle for recognition*: the moral grammar of social conflicts. Cambridge: Polity Press, 1995.

INEP. *Resultados da avaliação nacional de aprendizado, 2014*. Brasília, 2015.

INEP. *Resultados do SAEB, 2013*. Brasília, 2013. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/web/guest/educacao-basica/saeb/resultados>

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática*: guia do educador. Porto Alegre: Vesper AMB, 2014.

INSTITUTO TIM. *A matemática dos adultos*. São Paulo, 2015. Disponível em: <http://educacao.estadao.com.br/noticias/geral,adultos-nao-sabem-matematica-basica--segundo-pesquisa,1789357>.

JAMISON, E.; JAMISON, D; HANUSHEK, E. The effects of education quality on income growth and mortality decline. *Economics of Education Review*, n. 26, p. 772-789, 2007.

KAMII, C. *A criança e o número*. Campinas: Editora Papirus, 1992.

KAPLAN, R.; KAPLAN, E. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. Oxford: Oxford University Press, 2007.

KEENAN, T.; EVANS, S. *An introduction to child development*. 2.ed. London: Sage Foundations of Psychology, 2009.

LOCKHART, P. *A mathematician's lament*. New York: Bellevue Literary Press, 2009.

LUSARDI, A.; MITCHELL, O. The economic importance of financial literacy: theory and evidence. *Journal of Economic Literature*, v. 52, n. 1, p. 5-44, 2014.

OCDE. *Resultados do PISA, 2015*. Paris, 2016. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/PISA-2015-Brazil-PRT.pdf>.

OLINTO, G. A inclusão das mulheres nas carreiras de ciência e tecnologia no Brasil. *Inclusão Social*. Brasília, v. 5, n. 1, p. 68-77, 2011.

MACANA, E. C.; COMIM, F. O papel das práticas e estilos parentais no desenvolvimento da primeira infância. In: PLUCIENNIK, G.; LAZZARI, M.; CHICARO, M. (Orgs.). *Fundamentos da família como promotora do desenvolvimento infantil*: parentalidade em foco. São Paulo: Fundação Maria Cecília Souto Vidigal, 2015.

MALONEY, E.; SCHAEFFER, M.; BEILOCK, S. Mathematics anxiety and stereotype threat: shared mechanisms, negative consequences and promising interventions. *Research in Mathematics Education*, v. 15, n.2, p. 115-128, 2013.

McCORMACK, M. Mathematics and Gender. In: LESLIE, D.; MENDICK, H. *Debates in mathematics education*. London: Routledge, 2014. p. 49-57.

MUNIZ, N. *Relatos de memórias*: a trajetória histórica de 25 anos da Sociedade Brasileira de Educação Matemática (1988-2013). São Paulo: Editora Livraria da Física, 2013.

OECD. *PISA 2012*: results in focus. Paris, 2014. Disponível em: <http://www.oecd.org/pisa/keyfindings/pisa-2012-results-overview.pdf>.

PAIVA, A. M.; SÁ, I. P. Educação matemática crítica e práticas pedagógicas. *Revista Iberoamericana de Educação*, v. 2, n. 55, p. 1-7, 2011.

PARRAT-DAYAN, S. *Como enfrentar a indisciplina na escola*. São Paulo: Editora Contexto, 2008.

PARTEN, M. Social participation among preschool children. *Journal of Abnormal and Social Psychology*, v. 27, p. 243-269, 1932.

PIAGET, J. To Understand is to Invent. Nova York: Grossman Publishers, 1948.

REYNA, V. et al. How numeracy influences risk comprehension and medical decision making. *Psychology Bulletin*, v. 135, n. 6, p. 943-973, 2009.

ROBINSON, K.; ARONICA, L. *Creative schools*: revolutionizing education from the ground up. London: Allen Lane, Penguin Books, 2015.

SEN, A. Maximisation and the act of choice. In: SEN, A. *Rationality and freedom*. Cambridge: Belknap Press, 2002.

SENNETT, R. *Together*: the rituals, pleasures and politics of cooperation. London: Penguin Books, 2012.

STRICKER, L; WARD, W. Stereotype threat, inquiring about test takers' ethnicity and gender, and standardized test performance. *Journal of Applied Social Psychology*, n. 344, p. 665-93, 2004.

UNESCO. *Terceiro estudo regional comparativo e explicativo TERCE*: análise curricular. Santiago: UNESCO, 2014. Disponível em: <http://unesdoc.unesco.org/images/0022/002275/227501por.pdf>.

UNESCO. *Challenges in basic mathematics education*. Paris: UNESCO, 2012.

VALENTE, W. Por uma história comparativa da educação matemática. *Cadernos de Pesquisa*, v. 42, n. 145, p. 162-179, 2012.

VYGOTSKY, L. S. Play and its role in the mental development of the child. *Soviet Psychology*, 12, p. 62-76, 1967.

WOOLDRIDGE, J. *Econometric analysis of cross section and panel data*. Cambridge: the MIT Press, 2010.

WORLD ECONOMIC FORUM. *Global competitiveness ranking report, 2014-2015*. Disponível em: <http://reports.weforum.org/global-competitiveness-report-2014-2015/rankings/>.

O conceito de inteligência na escola: uma análise do papel do Círculo da Matemática em desmitificar a visão da inteligência como um atributo fixo

Olivier Bizzocchi, Cinthia Marie Tanaka e Herbert Prince Favero Pinto

Introdução

Apesar de o conceito de *inteligência* ter se alterado ao longo das últimas décadas, muitos profissionais da área de educação continuam a ensinar seus estudantes sob as premissas de que a inteligência é completamente herdada geneticamente e de que é um atributo fixo. Em geral, a má preparação dos professores em sua formação leva à dificuldade de se posicionarem diante da heterogeneidade dos estudantes presentes em sala de aula, especialmente nas escolas públicas em bairros de baixa renda.

Muitos pesquisadores defendem que os professores deveriam manter contato com os resultados de estudos sobre a inteligência, particularmente com os da área de neurociência, pois isso, de certa forma, facilitaria seu trabalho no que diz respeito à compreensão do raciocínio de seus estudantes. Um estudo retratado por Moysés e Collares (1994) confirma que, em 94,1% das vezes em que o professor prediz ao estudante que ele irá fracassar, isso realmente ocorre. E não porque aquele tem uma boa capacidade preditiva, mas sim porque as palavras de um professor têm o poder de afetar a autoestima do estudante.

O Círculo da Matemática tem contribuído para desmitificar essa ideia equivocada sobre a inteligência e fornece uma alternativa adequada de ensino, que consegue incluir todos os estudantes no processo de aprendizagem. Nas aulas do Círculo, é muito comum se utilizar o erro na construção do pensamento e há o constante incentivo aos estudantes para que eles busquem o método de resolução de um problema e para que avaliem a resposta encontrada. Essa mudança no foco do ensino, do resultado para o *processo de resolução*, faz com que mais estudantes participem das discussões, o que melhora a segurança e a autoestima dos estudantes.

Neste artigo, iniciaremos com uma breve história dos testes de inteligência e sua popularização no início do século XX. Em seguida, abordaremos as contribuições de estudos de correlação e das pesquisas na área da neurociência para o conceito atual de *inteligência*, que apoiam a ideia de que a inteligência se cultiva, oferecendo uma direção ao debate entre "natureza e criação" (*nature versus nurture*). Finalmente, apresentaremos uma análise sobre como o Círculo da Matemática beneficia estudantes e professores, ao propor uma abordagem que incentiva a crença de que a inteligência é um atributo *maleável*.

Uma breve história da inteligência

Ao longo da história humana, foram realizadas diversas tentativas de definir o que é *inteligência*, sem que os pesquisadores da área pudessem chegar a um consenso. Assim, até a atualidade, persiste a dúvida sobre como a inteligência está relacionada à estrutura do cérebro humano. Entretanto, um ponto comum é o de que a inteligência foi uma das protagonistas da evolução humana; ela é a habilidade que teria nos permitido o desenvolvimento da linguagem e de nossa capacidade única de adaptação.

No final do século XIX, com o surgimento da área da *psicometria*, vieram as primeiras ideias sobre a criação de testes padronizados, com o intuito de analisar de forma mais detalhada as diferenças entre as pessoas, em relação às suas capacidades cognitivas e aos seus comportamentos. O primeiro questionário satisfatório com o objetivo de mensurar a inteligência, foi criado por Alfred Binet, na França, no início do século XX, e começou a ser utilizado em 1904. Esse questionário considerava habilidades como *resolução de problemas*, *compreensão* e *raciocínio lógico*. Em princípio, Binet pretendia criar um instrumento que possibilitasse o diagnóstico objetivo de deficiências mentais, além de estimar a gravidade de tais deficiências.

A criação do teste teve como base a premissa de que seria possível mensurar a idade mental de um indivíduo. Assim, o teste continha questões com variados níveis de dificuldade, e foi aplicado a crianças de diferentes idades, para estabelecer o número de questões que cada criança deveria resolver, de acordo com sua idade. As crianças que fossem capazes de resolver um número menor de questões do que o que sua idade predizia seriam consideradas deficientes intelectuais. Nessa época, surgiu a expressão *quociente intelectual* (QI), que seria a razão entre a idade mental do indivíduo – mensurada pelo teste – e a sua idade cronológica. Posteriormente, por sugestão de outro psicólogo, William Stern, o QI passaria a ser representado pela

mesma razão, mas multiplicada por 100, o que modificou sua escala para a que conhecemos atualmente.

O teste de Binet-Simon foi levado para os Estados Unidos por Henry Goddard e passou por uma reformulação em 1915, que foi chamada de *escala de pontos de Yerkes-Bridges*. Nessa escala, diferentemente do original, que agrupava os testes por idade, os itens dos testes eram organizados por ordem de dificuldade, de forma que fosse possível atribuir mais ou menos pontos para cada item, dependendo de sua dificuldade. Em 1916, um professor da Universidade de Stanford, Lewis Terman, adotou a sugestão de Stern a respeito do QI e alterou a escala de resultados dos testes de inteligência, e esse novo teste foi chamado de *escala de Stanford-Binet*. Terman acreditava que um teste de inteligência poderia realmente mensurar de maneira acurada o pensamento abstrato de um indivíduo e, assim, ele enfatizou o uso de testes de raciocínio aritmético e de pensamento abstrato.

Uma das aspirações de Terman era utilizar o teste de Stanford-Binet como um método de identificação de indivíduos inaptos mentalmente. De fato, foram aplicados testes de inteligência a imigrantes que chegavam aos Estados Unidos, seguindo uma lei que proibia a entrada de pessoas consideradas "idiotas", "imbecis" e "lunáticas", ou com desabilidades físicas ou mentais. Goddard foi convidado a participar da implementação dessa política e desenvolveu um processo que consistia: a) na inspeção visual para detectar indivíduos com possíveis desabilidades mentais; e b) na aplicação de um teste de desempenho e de uma versão revisada da escala de Binet aos indivíduos selecionados na etapa de inspeção visual. É curioso perceber que a escala de Binet se popularizou muito mais nos Estados Unidos do que em sua terra natal, a França, onde ganhou popularidade somente em meados do século XX, quando uma versão norte-americana do teste foi apresentada à comunidade francesa. Além disso, apesar no passado de ter tido seu uso bastante associado a aplicações que envolviam eugenia, raça e imigração, a escala de Binet não parece ter sido desenvolvida sob essa concepção, uma vez que Binet parecia conhecer as limitações do teste que leva seu nome e acreditava na *maleabilidade* da inteligência.

A escala de Binet-Simon foi criticada por depender demais das habilidades verbais dos indivíduos testados, o que produziria um viés em relação ao nível de educação formal recebida. David Wechsler, que trabalhava no Hospital Bellevue, em Nova York, foi responsável pelo desenvolvimento da *escala de inteligência Wechsler-Bellevue*, publicada em 1939. Essa escala mede o potencial dos indivíduos em diferentes áreas intelectuais, a partir de uma série de perguntas e respostas padronizadas em temas de

assuntos gerais, meio ambiente e resolução de problemas cotidianos. Para criar o teste, Wechsler utilizou sua experiência com o teste aplicado no exército norte-americano, chamado de *Army Alpha* e *Army Beta*, utilizado em 1,75 milhão de convocados para a Primeira Guerra Mundial, e nas teorias de inteligência correntes na época: o *fator g* de Spearman – a ideia de que haveria um fator geral de inteligência – e as *sete habilidades primárias* de Thurstone – opositor de Spearman, que acreditava que a inteligência se dividia em sete habilidades. A escala de Wechsler-Bellevue foi revisada algumas vezes e, em sua versão atualizada, é a escala mais utilizada atualmente.

Além dessa escala, Wechsler também criou duas formas para mensurar o QI das crianças. A primeira é conhecida como *escala de inteligência Wechsler para pré-escolares e primário* (*Wechsler Preschool and Primary Scale of Intelligence* – WPPSI), por meio da qual crianças de 4,5 a 6 anos de idade são avaliadas por seis subtestes de natureza verbal e cinco de caráter manipulativo. Isso também possibilitou a coleta de informações sobre como essa faixa etária costuma se organizar e se comportar. A segunda forma é chamada de *escala de inteligência Wechsler para crianças III* (*Wechsler Intelligence Scale for Children* – WISC-III) e é direcionada a crianças e adolescentes com idades entre 6 e 16 anos. Nesse caso, a escala mede aspectos verbais e de execução, bem como fornece um QI de escala total atingida por cada criança ou adolescente. Dessa forma, foi possível averiguar as crianças que apresentavam dificuldades e as habilidades que deveriam ser trabalhadas.

Na década de 1960, John Horn e Raymond Cattell criaram a *teoria Gf-Gc*, dada a dificuldade que ainda existia para a elaboração de testes direcionados para uma análise mais detalhada das estruturas cerebrais dos adultos. Os dois estudiosos subdividiram a inteligência em duas vertentes básicas:

> a) *a inteligência fluida ou memória de trabalho* (Gf), que está localizada no sistema límbico do cérebro humano e é associada a componentes não verbais. Ela é responsável pelo armazenamento instantâneo de informação, o que, em outras palavras, seria a capacidade de resolver problemas novos, identificar relações complexas, reorganizar informações e compreender implicações sem depender de conhecimentos já adquiridos. Isso a torna responsável tanto pelo desenvolvimento do raciocínio quanto pela formulação de novos conceitos. Geralmente, a inteligência fluida é mais determinada por aspectos biológicos – ou genéticos – do que por aspectos culturais, além de ser o fator que mais se associa à concepção do fator g de Spearman. À medida que o tempo passa, ela se torna cada vez menor, principalmente após a idade de 21 anos, devido à gradual

degeneração das estruturas fisiológicas. Os problemas relacionados a lesões cerebrais ou à má nutrição são os que mais afetam esse tipo de inteligência; e

b) *a inteligência cristalizada ou inteligência social* (Gc), que está localizada no córtex superior e é primariamente relacionada à linguagem, ou seja, a tarefas de reconhecimento do significado das palavras. É comumente desenvolvida e aprimorada a partir de experiências culturais e educacionais. Sua principal função consiste em estender e aprofundar todas as informações que são adquiridas ao longo da vida da pessoa, de caráter declarativo (fatos, conceitos, valores e ideias) e procedimental (em que procedimentos já aprendidos se transformam em conhecimento). Quanto maior o tempo, mais informações são adquiridas e, portanto, maior é a inteligência cristalizada. Por isso, ter um bom desempenho escolar pode ajudar a aumentar o nível de Gc.

Várias técnicas para a mensuração desses dois tipos de inteligência são utilizadas nos dias atuais, inclusive no Brasil. Para Lohman (2001), a melhor forma de se medir o nível de inteligência fluida (Gf) seria por meio exclusivamente do: a) *raciocínio indutivo* (I), uma habilidade relacionada à descoberta de padrões, por meio da qual são analisadas características comuns entre algumas imagens para se inferir relações com estas; b) *raciocínio sequencial geral* (RG), uma habilidade relacionada à descoberta de regularidades, geralmente realizada com a premissa de que é preciso saber qual frase, dentre as alternativas apresentadas, tem mais lógica em relação às do enunciado; e c) *raciocínio lógico ou quantitativo* (RL), uma habilidade que avalia a capacidade de resolução de problemas matemáticos, de maneira indutiva e dedutiva. Em contrapartida, segundo Carroll (1993, 2005) e McGrew (2005, 2009), os testes mais eficazes para mensurar a inteligência cristalizada (Gc) são aqueles que aferem a compreensão verbal, o conhecimento lexical e a habilidade de fechamento.

Além disso, foram criados outros instrumentos para quantificar o desenvolvimento intelectual das crianças com dificuldade de se expressar verbalmente, algo que até agora não estava bem estabelecido. Dentre esses testes, os de *matrizes progressivas de Raven* (MPR) são os preferidos pela maior parte de seus utilizadores, por ser capaz de eliminar as influências sociais, culturais e linguísticas necessárias para os testes verbais, o que faz com que os resultados sejam menos influenciados pelo viés da educação e do nível socioeconômico. Os testes MPR foram criados por John Carlyle Raven, que os publicou em 1938 e os revisou em 1956, na Universidade de Dumfries, na Escócia. Trata-se de um conjunto de testes não verbais que avaliam aptidões relacionadas à compreensão de um padrão entre desenhos ou figuras geométricas. São apresentadas

alternativas, e o sujeito deve indicar a imagem que melhor completa a relação de imagens apresentadas. Existem três versões disponíveis de MPR: a *forma geral* (SPM), que pode ser aplicada a todos os grupos etários; a versão colorida ou *forma especial* (CPM), indicada para crianças de 3 a 10 anos e para pessoas com dificuldades de compreensão; e a *forma avançada* (APM), que busca diferenciar as pessoas com o melhor desempenho nos testes também realizados na forma geral.

As teorias da inteligência contemporâneas incluem: a *teoria triárquica* de Sternberg, a *teoria de múltiplas inteligências* de Gardner, a *teoria da inteligência emocional* de Goleman e as teorias da inteligência que envolvem *estudos dos processos cognitivos e neurológicos*. Sternberg rejeita a teoria de que a inteligência é unitária e acredita que ela pode ser dividida em três núcleos: a *inteligência analítica*, a *inteligência criativa* e a *inteligência prática*. Segundo Sternberg, ao se utilizar testes de QI e outros tipos de escala, somente a inteligência analítica é mensurada, o que deixaria de lado a inteligência utilizada na adaptação a novas situações (criativa) e a inteligência que é necessária no cotidiano (prática). Sternberg elaborou um teste para medir esses diferentes tipos de inteligência, denominado *teste de habilidades triárquicas* de Sternberg (*Special Tertiary Admissions Test* – STAT). Ele chama atenção por apresentar entre os indivíduos com notas mais altas grandes diversidades étnicas e socioeconômicas, se comparado aos testes tradicionalmente usados, o SAT (*Scholastic Aptitude Test* ou *Scholastic Assessment Test*) e o AP (*Advanced Placement*), exames utilizados pelas universidades para a admissão em seus programas.

Estudos mais recentes, realizados com a análise de um grande número de testes de inteligência, indicam que Spearman estaria correto quanto à existência de um fator geral de inteligência, o que descartaria a ideia de múltiplos fatores, defendida por Thurstone. Entretanto, Gardner percebeu que pacientes com lesões em certas áreas do cérebro poderiam ter um tipo de habilidade reduzida, enquanto outras permaneceriam intactas, o que é condizente com uma teoria de inteligências múltiplas. A *teoria das inteligências múltiplas* considera nove núcleos de inteligência: *verbal-linguístico*, *lógico-matemático*, *visual-espacial*, *musical-rítmico*, *corporal-cinestésico*, *naturalista*, *intrapessoal*, *interpessoal* e *existencial*. Os três primeiros núcleos podem ser mensurados da maneira convencional, por meio do uso de testes de inteligência já existentes. Porém, os demais tipos de inteligência – exceto a inteligência existencial –, apesar de serem valorizados na maior parte das culturas, não são mensuráveis. A teoria de Gardner teve grande impacto na educação: nas escolas que implementaram currículos com base nas múltiplas inteligências, ocorreu a melhora em vários aspectos, como o comportamento dos estudantes, as notas

em testes padronizados, a participação dos pais, a motivação e o desempenho de estudantes com desabilidades de aprendizado, entre outros.

A *teoria da inteligência emocional* de Goleman considera que as habilidades que regulam as nossas emoções e os nossos comportamentos em relação aos outros também são importantes para a nossa inteligência geral. Houve uma grande discussão a respeito da inclusão da inteligência emocional como um tipo de inteligência, mas, nos dias atuais, existem estudos que dão suporte a essa inclusão. Entretanto, uma das maiores críticas a essa teoria é a de que ela não é mensurável, além de ser difícil de ser definida.

Atualmente, no Brasil, existem várias instituições que aferem o QI. A mais tradicional é a Mensa, uma sociedade formada por pessoas com alto QI, fundada em 1946 na Inglaterra, e que possui cerca de 100 mil membros em mais de 100 países. Essa instituição utiliza uma pontuação com base em uma distribuição normal[1], ou seja, fundamentada na raridade.

Inteligência: um atributo fixo ou maleável?

O debate *nature versus nurture* (natureza *versus* criação) no que se refere à questão da inteligência não é novo: já no final do século XIX, existiam cientistas que discutiam a influência da genética *versus* o impacto do ambiente na inteligência dos indivíduos. Desde então, esse tema tem sido estudado com afinco por muitos pesquisadores de diferentes áreas do conhecimento. Entretanto, ainda hoje, há um certo mito em torno da inteligência. Nas escolas, é comum escutar referências sobre a inteligência, como se ela fosse um atributo fixo. Um estudo realizado nos Estados Unidos revelou que cerca de 25% dos professores e de futuros professores (estudantes) acreditam que a inteligência é uma entidade fixa, determinada biologicamente. Vários estudos têm mostrado que essa visão, além de ser incompleta, resulta em uma postura do professor em sala de aula que pode prejudicar o desempenho dos estudantes, o que torna essa discussão essencial para o escopo educacional.

Supreendentemente, a heritabilidade da inteligência – ou seja, o quanto os genes influenciam no resultado de testes que mensuram a habilidade mental – varia conforme

1 Em uma curva normal ideal, de curtose unitária, um desvio padrão acima da média representa 68,26% da área total da curva, dois desvios representam 95,44% e, três desvios, 99,73%. Nos testes utilizados pela Mensa, por exemplo, tanto o teste de Cattell quanto o de Wechsler utilizam desvio padrão considerado como 24: assim sendo, um indivíduo médio apresenta 100 pontos de QI, enquanto que um indivíduo que se saiu melhor do que 99,73% possui um QI de 172.

a idade do indivíduo. Estima-se que, na infância, crianças apresentam heritabilidade entre 20% e 40%; já na vida adulta, essa porcentagem pode chegar a 80%. Em geral, estudos sobre esse assunto são realizados a partir de comparações entre gêmeos (idênticos e não idênticos) que cresceram separados e entre filhos biológicos e adotados dentro de uma mesma família. Nessa linha de pesquisa, dois estudos foram importantes para a compreensão da inteligência como um atributo que depende da genética e do ambiente: o *Mistra* e o *Projeto de Adoção no Texas*.

O estudo do Mistra (*Minnesota Study of Twins Reared Apart*), realizado por Bouchard na Universidade de Minnesota, em 1999, analisou as duas categorias de gêmeos conhecidas popularmente: os *idênticos*, que compartilham 100% dos genes – tecnicamente denominados de *monozigóticos*, ou MZ –, e os *fraternos*, que compartilham 50% dos genes – conhecidos como *dizigóticos*, ou DZ. O estudo revelou que quanto maior for a quantidade de genes em comum entre dois membros de uma família, maior é a correlação média entre suas pontuações no QI. No entanto, quando os gêmeos são separados momentos após o nascimento, mesmo se forem criados em locais similares, a correlação cai pela metade, se comparado a quando eles são criados juntos. Se os gêmeos fossem colocados em locais – ou realidades – muito diferentes, em termos de renda e acesso à educação e à saúde, o papel que o ambiente desempenharia para explicar as diferenças na inteligência seria ainda mais evidente.

Em relação ao Projeto de Adoção do Texas (*Texas Adoption Project*), que contou com 700 filhos adotivos e seus pais – biológicos e não –, este também sustentou a hipótese de que a variabilidade genética se faz bastante presente no desenvolvimento de diferenças individuais, para a inteligência e a autoestima. Os filhos adotados foram analisados por meio de três testes, intertemporalmente: o de Stanford-Binet, para crianças com 3 e 4 anos de idade; a escala Wechsler de inteligência para crianças (WISC), aplicada quando elas atingissem os 5 anos de idade; e, por fim, a mesma escala Wechsler de inteligência, mas aplicada a adolescentes com 16 anos ou mais (*Wechsler Adult Intelligence Scale* – WAIS). Os pais adotivos também foram avaliados pela WAIS e por um exame denominado *Beta*, feito a lápis. A constatação de maior destaque desses testes foi a de que as crianças adotadas, quando adultas, assemelham-se mais com suas mães biológicas do que com seus pais adotivos, mesmo quando foram criadas por estes desde o nascimento.

Deve-se reconhecer que os resultados dos estudos de gêmeos e de adoção, que se relacionam à idade, não precisam necessariamente estar de acordo entre si. Isso ocorre porque os estudos com gêmeos geralmente realizam comparações de pares

de indivíduos da mesma idade, enquanto que os estudos de adoção frequentemente comparam indivíduos de idades distantes.

Em 2011, foi realizado o primeiro estudo genético de indivíduos que confirmaria as estimativas de heritabilidade da inteligência, obtidas por meio dos estudos com gêmeos e suas famílias. Os sujeitos desse estudo foram participantes de um projeto chamado Genética do Envelhecimento Cognitivo na Inglaterra e na Escócia (*Cognitive Ageing Genetics in England and Scotland* – Cages). Esse projeto teve acesso a 3.511 participantes saudáveis, que tiveram suas habilidades cognitivas mensuradas na fase adulta.

Para cada indivíduo, foram identificados os fenótipos cognitivos das inteligências fluida e cristalizada, por meio de testes. Para mensurar a inteligência cristalizada, foram utilizados testes de conhecimento adquirido e de vocabulário, enquanto a inteligência fluida foi mensurada por meio de testes relacionados à resolução de problemas, que costumam envolver situações pouco familiares ou abstratas, o uso de materiais e a pressão de tempo. Apesar de não se ter encontrado variantes genéticas específicas que pudessem ser associadas à inteligência, os resultados mostraram que entre 40% e 50% das variações na inteligência humana podem ser explicados por variações nas bases do nosso DNA.

Como visto anteriormente, os testes com gêmeos e indivíduos de famílias de adoção e, mais recentemente, os testes moleculares, têm obtido estimativas semelhantes para a heritabilidade da inteligência. Essa heritabilidade seria, na média, de aproximadamente 50%, o que nos faz ver que, apesar de a genética contribuir consideravelmente para a nossa inteligência, existem outros fatores que influenciam os resultados dos testes psicométricos de inteligência. A forma como o cérebro se estrutura, bem com a eficiência dos processos metabólicos, podem ser as principais variáveis-base para explicar os motivos de uma pessoa ser mais inteligente do que a outra. Com o avanço tecnológico, foram criadas e aprimoradas técnicas de imageamento cerebral, como a *ressonância magnética funcional* (fMRI) e a *atomografia por emissão de pósitrons* (PET), e técnicas de medição da atividade elétrica cerebral, como o *eletroencefalograma*. Como veremos a seguir, essas ferramentas tiveram um papel importante nas pesquisas que visam a entender as diferenças entre os indivíduos, em termos de inteligência.

Os indivíduos que se saem melhor nos testes de inteligência são aqueles que obtêm de forma mais consistente respostas corretas de testes mentais e, além disso, são capazes de fornecer essas respostas com maior rapidez. Embora as pesquisas na área tenham indicado correlações entre certas características do cérebro, como o seu tamanho ou o

seu padrão de atividade elétrica, e a inteligência psicométrica, essas correlações não são absolutas, e tampouco podemos explicar exatamente as razões por que elas ocorrem.

Em 1993, o grupo de pesquisa de Lee Willerman recrutou 67 pessoas para que elas se submetessem a um escaneamento cerebral. Adicionalmente, essas pessoas também foram examinadas por um grupo de testes mentais. O resultado foi uma correlação de cerca de 0,3 a 0,4, ou seja, uma associação moderada entre a inteligência e o tamanho do cérebro. Posteriormente, outros estudos confirmaram essa estimativa moderada. Entre as hipóteses que poderiam explicar esse resultado estão: a) a quantidade de células nervosas (neurônios), que seria maior em cérebros maiores; b) a quantidade de conexões entre as células; e/ou c) as bainhas de mielina – camadas em torno dos neurônios – mais espessas, que possibilitariam o envio de mensagens mais rapidamente entre as células.

Outras variáveis que podem ajudar a explicar as diferenças nas medidas de inteligência são a complexidade e a velocidade das respostas cerebrais frente a estímulos. Esse tipo de experimento costuma utilizar o eletroencefalograma, um exame que mede os impulsos elétricos por meio da colocação de eletrodos sobre o couro cabeludo do sujeito experimental. A ideia é registrar as correntes elétricas do cérebro em resposta a determinado estímulo, por exemplo, um som mais grave em meio a uma sequência de sons mais ou menos parecidos em outro tom. Esse estímulo é aplicado ao participante do experimento em diversas ocasiões, para se calcular a resposta média do cérebro a ele, o *potencial relacionado a evento* (*event-related potential* – ERP). Em geral, analisando a resposta elétrica, é possível ver, a aproximadamente 300 milissegundos (ms), um grande pico de onda. Em pessoas que vão melhor nos testes de inteligência, esse pico parece ocorrer um pouco antes dos 300 ms. Além disso, essas pessoas parecem ter o formato de algumas partes da resposta elétrica um pouco alterado, como, por exemplo, uma linha mais inclinada em um momento específico, em que a voltagem elétrica parte de um valor negativo para um valor positivo.

Com o avanço da tecnologia nas ferramentas de neuroimagem, uma teoria que tem ganhado força nos últimos anos é a chamada *teoria de integração parieto-frontal* (*Parieto-frontal Integration Theory* – P-FIT). Essa teoria foi proposta por Rex Jung e Richard Haier, em 2007, após realizarem a revisão de 37 estudos de neuroimagem. Os dados das pesquisas sugeriram que algumas das áreas do cérebro relacionadas à inteligência são as mesmas que se relacionam à atenção, à memória e à linguagem. Essas áreas seriam as responsáveis pelas diferenças individuais nos desempenho nos testes de inteligência, em especial, as áreas corticais de associação, que têm o papel de

integrar a informação entre as diferentes áreas do cérebro. Entretanto, os autores fazem questão de enfatizar que foram encontradas inconsistências entre os dados analisados, como, por exemplo, o fato de que pesquisas diferentes apontam para correlações entre menor e maior quantidade de substância cinzenta do cérebro e melhores resultados em testes de inteligência. Por outro lado, é possível que essas inconsistências sejam, na verdade, um indicativo de que diferentes organizações cerebrais podem levar à mesma eficiência cerebral. Além disso, ao combinar esse tipo de inconsistência com outros resultados, como o de que a substância cinzenta aumentaria após a prática e o aprendizado, existe uma especulação de que o cérebro seria ainda mais plástico do que se acreditava anteriormente.

Apesar de os estudos serem relativamente recentes nessa agenda de pesquisa (cerca de 20 anos), como visto acima, pesquisadores observaram que os cérebros de indivíduos diferentes operam de formas diferentes. Uma das principais variáveis que permitem que isso aconteça é a *idade*. Vários pesquisadores, como Thurstone e Ackerson (1929), Miles e Miles (1932), Jones e Conrad (1933), chegaram à conclusão de que a inteligência pode ser representada por uma curva que associa a idade mental em meses com a idade em anos. O formato dessa curva mostra que o crescimento intelectual do ser humano apresenta uma forte aceleração, positiva, no período da infância e da pré-adolescência; ela se torna decrescente, de forma sensível, na adolescência, e se torna nula na idade adulta. No período entre a idade madura até a velhice, a curva declina de maneira significativa.

No início da década de 1940, foi divulgado outro importante estudo, denominado "Berkeley growth study", que também examinou o desenvolvimento da inteligência em crianças, adolescentes e adultos. Os resultados foram obtidos pela aplicação de três testes para a idade pré-escolar (Gesell, Binet-Simon e o teste Califórnia) e de três escalas, realizadas com adolescentes e adultos (Binet, McNeman e Wechsler). A principal conclusão desse estudo foi a de que, aos 16 anos de idade, o crescimento da inteligência parecia se anular. No entanto, o método e os instrumentos utilizados para realizar as mensurações dos resultados foram criticados por outros estudiosos.

Anos mais tarde, a pesquisadora Nancy Bayley aplicou um método diferente, analisando casos individuais de cinco rapazes e cinco moças, em um estudo conhecido como "Harvard growth study". A principal diferença deste com o método anterior foi a de que Bayley observou um crescimento intelectual até os 30 anos. Até essa idade, as curvas de inteligência individual oscilaram com grandes e pequenos progressos, e ainda com regressões em algumas situações. Além disso, ela constatou que não ocorrem

mudanças, quanto ao aumento da inteligência, nos primeiros cinco anos de vida das pessoas. No entanto, apesar de cada criança ter um padrão próprio de progresso, Bayley observou que, após os 5 anos de idade, algumas delas crescem intelectualmente muito mais do que outras.

De acordo com Leland Stott e Rachel Ball (1965), a capacidade para aprender na infância é muito maior do que no período abrangido entre os 16 e os 20 anos de idade. Depois dos 20 ou 30 anos, essa capacidade declina expressivamente. Porém, isso não significa que as pessoas param de aprender, uma vez que algumas funções intelectuais continuam a se desenvolver até os 60 anos. Segundo Freedheim (1944), isso ocorre porque os adultos já "aprenderam a aprender", e é com esse conhecimento, adquirido na infância, que eles dão continuidade à vida.

Um dos mais importantes estudos que relaciona idade e inteligência foi realizado a partir de um estudo chamado "Levantamento mental escocês" ("Scottish mental survey"), organizado pelo Conselho Escocês para Pesquisa em Educação. Em junho de 1932, foi aplicado um teste de inteligência geral a todos os estudantes entre 10 e 11 anos de idade que frequentavam a escola na Escócia. O mesmo levantamento foi repetido em 1947, com crianças da mesma idade. Já em 1996, uma equipe de pesquisadores liderada por Lawrence Whalley e Ian Deary convocou os participantes dos levantamentos de 1932 e de 1947 para participar de um novo estudo (DEARY; WHALLEY; STARR, 2009). Esse estudo buscava encontrar uma relação entre os resultados de testes realizados na infância e os resultados de testes de habilidade cognitiva – testes envolvendo as matrizes progressivas de Raven – obtidos em idades mais avançadas. A realização do teste ocorreu em duas ocasiões para cada um dos grupos: o de 1932 ocorreu quando os participantes estavam com aproximadamente 77 e 80 anos de idade; e o de 1947 ocorreu quando eles tinham aproximadamente 65 e 67 anos de idade. Um dos principais resultados do estudo foi a descoberta de uma relação entre os testes que depende de quão bem o indivíduo se saiu quando realizou o teste na infância. Em geral, as pessoas que obtiveram resultados mais altos no teste de inteligência, quando crianças, demonstraram aumento do desempenho cognitivo, enquanto pessoas com níveis menores de inteligência tiveram maior declínio cognitivo.

Uma crítica ao estudo de Whalley e colegas diz respeito ao fato de que os resultados do teste aplicado aos indivíduos com idade avançada foram comparados aos resultados dos testes aplicados na infância desses indivíduos, pois, aos 10 ou 11 anos de idade, as crianças ainda não atingiram o pico de inteligência da fase adulta. Além disso, como os testes foram aplicados a dois grupos grandes de indivíduos que nasceram em 1921

ou em 1936, é difícil afirmar que seus resultados se estendem aos demais indivíduos, sem a devida generalização. De 1956 a 1991, K. Werner Schaie recrutou pessoas de idades variadas (de jovens a idosos) para participar de testes a cada sete anos em seu laboratório, em Seattle, EUA. A cada sete anos, todos os voluntários recrutados antes também eram convocados novamente para responder aos mesmos testes. Dessa forma, Schaie pôde examinar uma ampla quantidade de dados que têm auxiliado a nossa compreensão, não somente dos efeitos da idade sobre a inteligência, mas também dos efeitos da idade sobre fatores como a saúde, e de que fatores poderiam indicar demência nos indivíduos, pois o estudo também incorporou o histórico de saúde da maioria dos participantes.

Os testes administrados visavam a obter resultados quanto ao nível de inteligência nos campos de *significado verbal*, *espaço*, *raciocínio*, *números* e *fluência de vocabulário*, que Thurstone teria identificado como responsáveis pela variação no domínio de habilidades de crianças e adolescentes. Ao longo dos sete ciclos, conforme mudava a teoria da inteligência, alguns testes foram adicionados e alterados, de forma a ampliar as possibilidades de pesquisa. O estudo longitudinal de Seattle chegou a conclusões importantes em várias frentes. Uma delas se refere ao declínio de habilidades pela idade, que varia conforme o tipo de habilidade examinada. Particularmente, parece haver uma tendência de que as habilidades relacionadas à inteligência fluida se deteriorem antes do que as relacionadas à inteligência cristalizada. Entretanto, quanto os participantes atingiram os 70 anos de idade, segundo o estudo, ocorreu uma queda mais íngreme em suas habilidades cristalizadas.

A partir dos dados desse estudo, também foram identificados certos fatores que reduzem o risco de declínio cognitivo na terceira idade, como, por exemplo: a ausência de doenças cardiovasculares e outras doenças crônicas, a interação com ambientes favoráveis mediados pelo alto nível socioeconômico, o envolvimento em atividades em ambientes complexos e intelectualmente estimulantes, e uma alta habilidade cognitiva do cônjuge. Para investigar se intervenções educacionais poderiam reverter o declínio intelectual, foram conduzidos estudos de treinamento cognitivo entre os participantes do estudo longitudinal. De fato, a reversão dos efeitos negativos nas habilidades intelectuais ocorreu para cerca de 2/3 (dois terços) do grupo estudado. Em particular, cerca de 40% dos participantes retornaram ao nível cognitivo pré-declínio, o que fortalece a hipótese de que o declínio pode ocorrer pelo desuso de certas funções cognitivas.

A relação entre idade e inteligência também se verifica em crianças. Particularmente, a inteligência fluida, a velocidade de processamento e a memória de trabalho parecem

seguir um desenvolvimento conjunto. Essas relações foram investigadas separadamente – pareando duas das três características, por exemplo – por diversos pesquisadores nas décadas de 1980 e 1990. Uma revisão de Sandra Hale e Astrid Fry, publicada em 2000, examinou os resultados de forma mais consistente. Entre os resultados reportados nessa revisão, destacam-se os resultados das relações entre:

- *idade e inteligência* – um resultado conhecido desde que os testes de Binet-Simon começaram a ser utilizados é o de que, à medida que as crianças crescem, seus resultados nos testes de inteligência melhoram. Na década de 1980, descobriu-se que essa melhora é mais rápida durante a infância e é seguida por uma melhora mais lenta durante a adolescência, ou seja, a inteligência fluida "aumenta" de forma não linear, como também ocorre com a velocidade de processamento e a memória de trabalho;

- *memória de trabalho e inteligência* – a relação entre a memória de trabalho e a inteligência fluida parece bem estabelecida. Entretanto, ainda há dúvidas sobre o que significa essa correlação, pois, apesar de certos cientistas defenderem que a memória de trabalho é uma das bases para o raciocínio e para a resolução de problemas, outros acreditam ser outro tipo de memória, relacionado ao armazenamento de informações no longo prazo, o responsável por essa habilidade; e

- *idade, velocidade, memória de trabalho e inteligência* – um estudo dos autores da revisão, na década de 1990, propôs-se a analisar a relação causal entre idade, velocidade, memória de trabalho e inteligência fluida, com um grupo de participantes entre 7 e 19 anos de idade. Seus resultados mostraram que as mudanças na velocidade de processamento relacionadas à idade mediam a maior parte da melhora da memória de trabalho. Além disso, cerca de 50% do aumento da inteligência fluida relacionada à idade foi influenciada por mudanças de desenvolvimento na velocidade de processamento e memória de trabalho (FRY; HALE, 2000).

O Círculo da Matemática na desmitificação do conceito de inteligência

Nesta seção, analisamos como o Círculo da Matemática (CM) tem contribuído para a desmitificação da crença de que a inteligência é um atributo fixo. Em primeiro lugar, descrevemos a dificuldade de se lidar com a heterogeneidade de estudantes enfrentada comumente pelos professores, e como a crença destes sobre sua capacidade de aprender contribui de forma positiva ou negativa para o desempenho escolar dos estudantes.

Em seguida, discutimos como a abordagem do CM é bem-sucedida ao lidar com a questão da heterogeneidade, e como ela tem potencial para fazer com que crianças e educadores passem a tratar a inteligência como um atributo maleável.

A caracterização do estudante como "burro" ou incapaz de aprender dentro do ambiente escolar deixa claro que a formação dos professores e de outros agentes da escola (coordenadores, supervisores etc.) é deficiente, pois não é capaz de prepará-los para as diferentes realidades que encontrarão na escola. Essa dificuldade é comum e foi relatada pelo sociólogo francês François Dubet, em entrevista à "Revista Brasileira de Educação", em 1997. O sociólogo se propôs a ministrar aulas de história e geografia durante um ano, como forma de entender no que consiste realmente ser um professor. Dubet, assim como outros pensadores da área de educação, como Paulo Freire, faz uma dura crítica aos programas escolares, que são feitos "para um aluno que não existe", pois são dirigidos a um estudante médio, teórico, enquanto que, na sala de aula, existem estudantes "extraordinariamente" diferentes em termos de desempenho escolar (PERALVA; SPOSITO, 1997).

É verdade que as teorias da inteligência desenvolvidas por cientistas buscam definir o que é ser inteligente. Entretanto, nem sempre tais teorias ditam o que as pessoas percebem como *inteligência* no seu dia a dia. Para investigar as crenças das pessoas a respeito da inteligência, foi desenvolvida uma abordagem por meio da qual se pede que pessoas leigas listem as características que definiriam uma pessoa inteligente ou a inteligência em si. Acredita-se que o psicólogo Ulrich Neisser tenha sido o responsável por perceber a importância dessa abordagem para o campo dos estudos em inteligência: ela foi denominada por Sternberg *teorias implícitas da inteligência* – em contraposição às teorias explícitas de especialistas. Em geral, costuma-se dividir as teorias implícitas da inteligência em duas categorias: a *teoria de entidade da inteligência* – associada à crença de que a inteligência é um atributo fixo – e a *teoria incremental da inteligência* – associada à crença de que a inteligência é um atributo maleável, que pode ser afetada pelo treinamento e pelo esforço. A aplicação dessa abordagem em diferentes países tem permitido a comparação dos contextos culturais na formação das crenças sobre a inteligência, e parece indicar que, em geral, os indivíduos de países orientais, como China e Japão, costumam acreditar mais na inteligência como atributo maleável – ou seja, valorizam o esforço e o conhecimento de um indivíduo – do que os indivíduos de países ocidentais, como Estados Unidos e Alemanha, que atribuem maior valor à habilidade inata das pessoas. No entanto, mesmo entre os países ocidentais, existem discrepâncias, como veremos a seguir, no caso dos Estados Unidos e da Alemanha.

Em uma pesquisa publicada em 2006, M. Holland Joyner e outros investigaram o desenvolvimento das crenças a respeito da inteligência em crianças da pré-escola, 2º, 5º e 8º anos de dois países, Alemanha e Estados Unidos. Foram encontradas três diferenças: a) as crianças alemãs são mais propensas do que as norte-americanas a reportar que pessoas inteligentes não necessitam de esforço para ser bem-sucedidas; b) as crianças norte-americanas acreditam mais na maleabilidade da inteligência do que as crianças alemãs; e c) as crianças norte-americanas veem mais a inteligência como uma habilidade social positiva do que as alemãs. Os autores acreditam que parte dessas diferenças tenha origem no sistema educacional dos dois países. Eles relatam que, na Alemanha, é comum a realização de testes que avaliam o nível de habilidade das crianças desde muito cedo – enquanto que, nos Estados Unidos, essa avaliação começa entre a escola secundária e o ensino médio. Esses testes são, inclusive, utilizados como parte de um processo de decisão que culmina na matrícula das crianças em certos tipos de sistemas escolares, de acordo com seus resultados. Como os resultados dos testes e a escolha do sistema escolar influenciam no ingresso à universidade, é possível que a mensagem transmitida às crianças seja a de que esforços adicionais, posteriores à escolha do sistema escolar, são inúteis. Enquanto isso, nos Estados Unidos, existe a cultura de que mesmo indivíduos com repetidas falhas acadêmicas podem ter acesso a títulos educacionais avançados.

Analisar as discrepâncias existentes entre as teorias implícitas da inteligência em diferentes culturas ajuda a entender mais sobre as características que influenciariam a escolha da inteligência como atributo fixo ou maleável. Como vimos na comparação entre Alemanha e Estados Unidos, é possível que o sistema educacional motive essa escolha, logo na infância ou na adolescência. Entretanto, uma pesquisa desenvolvida por Lisa S. Blackwell e colaboradores, publicada em 2007, mostra que é possível que a visão sobre a inteligência seja maleável. Nesse estudo, Blackwell elaborou um experimento por meio do qual comparou dois grupos de estudantes do 7º ano, que vinham apresentando notas cada vez mais baixas em matemática. Os dois grupos receberam treinamento extra em matemática, mas somente um dos grupos recebeu também um treinamento a respeito da teoria incremental da inteligência. Ao fim do experimento, verificou-se que apenas um dos grupos deixou de apresentar quedas nas notas de matemática: o grupo que recebeu instruções como "você pode se tornar mais inteligente ao longo do tempo por meio do esforço". Blackwell também foi responsável por outro estudo, no qual comparou estudantes que tinham notas parecidas ao entrar na etapa de ensino equivalente ao ensino fundamental II. Tais estudantes se dividiam entre os que tinham uma crença de que a inteligência era fixa, e os que acreditavam que a inteligência era

maleável. O estudo acompanhou os estudantes durante dois anos e percebeu que, enquanto os estudantes do primeiro grupo apresentaram uma estagnação em suas notas, os estudantes do segundo grupo melhoraram seu desempenho acadêmico.

Nesse sentido, o projeto Círculo da Matemática é uma abordagem com grande potencial, pois promove, por meio de suas diretrizes, uma *visão incremental da inteligência*. Sua abordagem se fundamenta em pilares como: o *desenvolvimento da autoestima do estudante*, o *uso do erro no processo de aprendizagem*, o *trabalho em grupo*, a *valorização da participação do estudante* – ao invés do acerto – e a *não competição*, entre outros. A dinâmica das aulas do CM gira em torno de atividades que têm forte apelo lúdico e que, diferentemente de várias abordagens que se dizem alternativas à tradicional, praticamente não dependem de recursos didáticos muito mais sofisticados do que o giz e uma lousa.

Durante as sessões, as crianças se organizam em um semicírculo em frente à lousa, o que descaracteriza completamente a disposição usual das carteiras e cadeiras nas salas de aula. Esse ambiente amigável incentiva a participação de todos os estudantes, viabilizando uma conversa que parece simples, mas que, no fundo, é uma grande discussão matemática. A valorização da opinião de todos na construção do processo de resolução da atividade favorece a quebra de rótulos, como "burro" ou "gênio", que perseguem algumas crianças. Assim, o estudante que acreditava ser "burro" passa a ter mais confiança, participação e melhores resultados de aprendizagem e, em contrapartida, aqueles ditos "gênios" passam a ter uma postura mais colaborativa e são instigados a valorizar os colegas e suas ideias.

Daniel T. Willingham, em seu livro "Por que os alunos não gostam da escola?" (WILLINGHAM, 2011), discute em um dos capítulos a questão da inteligência dentro da escola. O autor concorda com os resultados obtidos por Blackwell, em relação às teorias implícitas da inteligência, e acredita que promover um ambiente no qual o esforço é valorizado (visão incremental da inteligência) ajuda a melhorar o desempenho das crianças na escola. Para conciliar a heterogeneidade de desempenhos dos estudantes em sala de aula, Willingham sugere algumas estratégias para auxiliar as crianças mais lentas em seu processo de aprendizagem, tais como: o elogio do esforço sobre a habilidade, a promoção da ideia de que o esforço compensa, o tratamento do fracasso como um passo em direção ao aprendizado e a demonstração de confiança nos estudantes, entre outros.

Segundo Willingham, elogiar a inteligência da criança pode fazer com que ela não atinja o seu potencial máximo, pois, geralmente, crianças que são constantemente

elogiadas por sua inteligência, e não por seu esforço, permanecem na zona de conforto. Elas desistem rapidamente das tarefas que não têm facilidade para realizar, muitas vezes como forma de não frustrar os pais ou o professor. É importante destacar também que essas crianças, provavelmente, serão menos bem-sucedidas em lidar com dificuldades e desafios ao longo de sua vida. Na abordagem do CM, um dos pontos procedimentais é o *elogio à participação do estudante*, sem a premiação dos acertos. Além disso, outra diretriz do CM que incentiva o esforço, ao invés da habilidade, é o *perguntar incessante*, que faz com que estudantes acostumados a ser elogiados pelo acerto também sejam questionados, de forma a ter que desenvolver argumentos, juntamente com os demais estudantes, para sustentar ou refutar suas respostas. O papel do educador é o de *mediador*, mais do que o de um professor preocupado apenas em transmitir o conteúdo pré-estabelecido.

Por ter o foco na *criança*, ao invés de no conteúdo, a aula é conduzida com o objetivo de que diferentes formas de raciocínio se acomodem e possam trabalhar em conjunto e de maneira eficiente, com a inclusão de todos os estudantes. Nem sempre as atividades saem como previsto, e os educadores têm a orientação de que podem mudar a direção da atividade de acordo com o grupo em que estão trabalhando. Além disso, cada atividade do CM é planejada de forma que o processo seja aprendido. Mais do que repetir um algoritmo, o objetivo é que as crianças tenham a oportunidade de explorar múltiplos caminhos até que a atividade faça sentido para elas. Um exemplo de atividade do CM é a utilizada para apresentar as quatro operações (soma, subtração, multiplicação e divisão). Nessa aula, introduz-se a "reta dos números", o que proporciona o aprendizado desde o sistema posicional dos números até a visualização das operações matemáticas, passo a passo. Essa visualização é importante, pois ilustra, de maneira simples, o que acontece com as unidades, as dezenas, as centenas etc. durante as operações matemáticas, fazendo com que as crianças entendam melhor o processo que existe por trás dos algoritmos tradicionais para a resolução de operações ensinados em sala de aula.

Ao fim de cada atividade, é realizada uma espécie de *retrospectiva*, na qual é enfatizado o encadeamento lógico das ideias até a resposta do problema, o que garante às crianças a chance de visualizar todo o processo de resolução da atividade. A compreensão do raciocínio lógico por trás das atividades faz com que se desenvolva outra habilidade: a de *extrapolar o resultado obtido* para outros domínios. Descobrir novos resultados certamente é um desafio extremamente compensador, mas que costuma demandar tempo e esforço por parte de todos. Ao motivar os hábitos de encarar desafios e incentivar os estudantes a enfocarem o processo de resolução, o CM transmite as

mensagens de que o esforço compensa e de que os estudantes têm o poder de governar seus próprios aprendizados.

A ideia de utilizar o *erro* no processo de aprendizado não é nova, mas é pouco disseminada como prática em sala de aula. Nas aulas do CM, um ponto central é a construção da linha de raciocínio com base justamente nos erros. Assim, o erro deixa de ser considerado um elemento a ser evitado e passa a fazer parte do processo de aprendizado. As crianças são convidadas a "chutar" respostas e a avaliar tais respostas entre si. Os educadores atuam como facilitadores desse processo, e a aprendizagem é construída com a participação de todos, respeitando a individualidade de cada um.

Em seu livro "Pedagogia da autonomia" (1996), Paulo Freire afirma que *ensinar é uma especificidade humana* e, que entre diversas exigências, demanda do educador as capacidades de *saber escutar* e *querer bem aos educandos*. Assim, uma das abordagens pedagógicas do Círculo da Matemática enfatiza a importância de se ouvir "de verdade" cada sugestão dos estudantes. A valorização das opiniões das crianças é uma peça-chave para motivar a participação e o bom desenvolvimento do aprendizado ao longo das aulas. Todas as sugestões são registradas no quadro, um instrumento que serve para evidenciar a contribuição de cada participante, mostrando que todos eles são importantes. Além disso, o cuidado de chamar cada estudante pelo nome e o uso de perguntas não perigosas – como "qual será o nome da bailarina?" ou "quantos passos ela irá andar?" – direcionadas às crianças que parecem ter medo de participar, fazem com que os estudantes se sintam mais seguros, o que melhora não apenas suas habilidades cognitivas, mas também a sua autoestima. Esses pontos procedimentais são essenciais para que as crianças desenvolvam uma relação de confiança com o educador e passem a ver o CM como um ambiente seguro para expor suas opiniões e ideias nas discussões matemáticas.

Conclusões

Este artigo teve como inspiração principal mostrar o papel que o Círculo da Matemática desempenha na disseminação da inteligência como um *atributo maleável*, por meio de sua abordagem única. Na primeira parte, falamos sobre os diferentes modelos teóricos de inteligência e seus respectivos testes. Vimos que as pesquisas sobre a inteligência têm sido motivadas por diferentes pressupostos e que, ainda hoje, não há um consenso sobre o que é a inteligência ou uma teoria única que possa explicá-la. Desde o teste de

Binet-Simon, foram criados diversos outros testes que visam a mensurar a inteligência humana. Muitos deles, em versões revisadas, continuam sendo aplicados até os dias atuais, mas com uma consciência muito maior sobre suas limitações.

Até meados do século XX, entretanto, parte das aplicações dos testes de QI estava relacionada diretamente à eugenia, à raça e à imigração. Esse uso estaria relacionado a certas correntes de pensamento vigentes na época, e muitos cientistas acreditavam que a inteligência era determinada somente pela genética dos indivíduos. Além disso, tais cientistas não concebiam a ideia de que pudesse haver mais de um tipo de inteligência, apesar de ela ter sido proposta diversas vezes, de maneiras diferentes, ao longo da história das teorias da inteligência.

A categorização da inteligência em dois fatores – a *inteligência fluida* (Gf) e a *inteligência cristalizada* (Gc) – teve grande impacto nos estudos posteriores sobre a inteligência. O primeiro desses fatores está relacionado a componentes não verbais, que dependem pouco da instrução do indivíduo. Diferentemente, a Gc está associada a componentes que seriam desenvolvidos por meio de experiências culturais e educacionais. O desenvolvimento de testes capazes de mensurar cada uma dessas inteligências fez com que se compreendesse melhor o papel da instrução acadêmica na inteligência.

Ao longo dos anos, parece ter havido uma tendência a se aceitar mais as teorias que propõem novos tipos de inteligência. As teorias contemporâneas incluem, por exemplo, a *teoria de múltiplas inteligências* de Gardner e a *teoria da inteligência emocional* de Goleman. Enquanto a primeira supõe que existem nove núcleos de inteligência que devem ser considerados, a segunda propõe que a habilidade de regular as próprias emoções também é um tipo de inteligência. Apesar de algumas delas serem mais difíceis de se mensurar e avaliar, em geral, a aplicação dessas novas teorias como base para treinamentos que visam ao desenvolvimento das habilidades especificadas pelo tipo de inteligência tem produzido resultados positivos para os indivíduos que participam de tais treinamentos.

A questão da *natureza versus criação*, em relação à inteligência, é um assunto que ainda gera debates acalorados entre os cientistas. Atualmente, o acesso a diversas técnicas de imageamento cerebral tem permitido novos *insights* sobre o que é ser inteligente, assim como tem ajudado nessa questão. Uma pergunta que muitos cientistas tentaram responder é: o que faz um indivíduo ser mais inteligente do que outro? Para respondê-la, eles buscaram entender quais características do cérebro eram diferentes em pessoas mais inteligentes. Esses estudos indicam que, de fato, existem correlações entre certas

características, como o tamanho do cérebro ou a velocidade de processamento dos estímulos, e o resultado dos testes de inteligência de um indivíduo. Além disso, mais recentemente, foi sugerido que existiria um conjunto de áreas relacionadas à inteligência. No entanto, ao analisar os dados do estudo, pesquisadores notaram que diferentes estruturas cerebrais poderiam levar à mesma eficiência cerebral, o que poderia indicar que o cérebro humano está preparado para se adaptar, ou seja, ele é plástico.

Estudos com gêmeos e estudos moleculares que examinam o DNA de indivíduos têm ajudado a entender o quanto a *genética* contribui para a inteligência. Na média, esses estudos apontam que cerca de 50% da inteligência é herdada geneticamente; entretanto, deve-se ter em mente que esse número varia de acordo com a idade do indivíduo. Essas pesquisas, em conjunto com outros estudos, deixam-nos a conclusão de que diferentes resultados nos testes de inteligência podem ser explicados, tanto por fatores genéticos quanto por fatores ambientais, e que a melhor idade para se aprender algo novo é a infância, uma vez que o cérebro se encontra em puro processo de formação, em termos de crescimento e de facilidade na absorção do conhecimento.

O emaranhado de uma série de problemas encontrados no ensino fundamental, essencialmente na educação pública, tem mostrado a necessidade de novas exigências para a formação dos professores nas áreas de neurociência e matemática. A falta de conhecimento nessas áreas tem levado, há muito tempo, a uma postura de insegurança por parte desses profissionais nas salas de aula, o que afeta diretamente a autoestima dos estudantes e, por consequência, os seus processos de aprendizagem. Empiricamente, há dados que revelam a falta de qualidade do ensino público no Brasil, como, por exemplo, o Índice de Desenvolvimento da Educação Básica (IDEB), criado em 2007.

No Brasil, o Círculo da Matemática tem sido aplicado desde 2013, a princípio como projeto-piloto em seu primeiro semestre, em várias escolas públicas, abrangendo as principais capitais do país. Diferentemente do programa oferecido nos Estados Unidos, onde nasceu a abordagem do Círculo, o foco do programa brasileiro são as crianças de 7 a 10 anos com baixo nível socioeconômico. Em praticamente dois anos de aplicação, a prática do Círculo da Matemática nas escolas tem conquistado estudantes, professores e coordenadores.

Neste artigo, enfocamos uma contribuição específica, que é consequência direta da abordagem pedagógica do Círculo: a disseminação de que *a inteligência é maleável* e, portanto, o *esforço* e o *treinamento* melhoram o desempenho escolar dos estudantes. Entretanto, estamos cientes de que a contribuição do Círculo da Matemática para

a educação brasileira tem potencial para ser muito maior. Ao levar às escolas uma abordagem cujo foco é o *desenvolvimento do raciocínio lógico* das crianças, e que naturalmente tem como produto a construção de alicerces como a *colaboração* e a *melhora da autoestima*, o Círculo proporcionou melhorias ao desempenho acadêmico e ao desenvolvimento emocional de seus estudantes. Participar das aulas do Círculo da Matemática envolve muito mais do que somente aprender a fazer matemática, pois é durante as aulas que os estudantes aprendem a trilhar os caminhos que conduzem a novas descobertas e ao respeito mútuo.

Nem sempre a matemática é a matéria favorita dos estudantes. Mesmo fora do ambiente escolar, a matemática costuma ser uma das disciplinas mais temidas, pois é associada a uma teoria pouco palpável, abstrata, que somente poucos são capazes de compreender. Um dos grandes destaques da abordagem utilizada é que, por meio de atividades simples e que contemplam a complexidade da construção do caminho de resolução dos problemas, o Círculo da Matemática mostra que, com o esforço de todos, é possível entender a matemática. A pergunta "e se as crianças gostassem de matemática?" é um dos emblemas do Círculo, que norteia as aulas do projeto, em busca da construção de uma geração de crianças que, no futuro, dirão que "aprenderam a gostar de matemática" ou que, ao menos, conseguirão reconhecer que "a matemática não é tão difícil assim". Além disso, acreditamos que, se as crianças conseguirem ver que o seu esforço foi recompensado no caso da matemática, elas se motivarão a se esforçar mais também em outras disciplinas e em outros domínios de suas vidas.

Bibliografia

AMORIM, C. *O professor e a indisciplina escolar*: mudando o foco. Curitiba: PUC-PR, 2005. Disponível em: <http://www.pucpr.br/eventos/educere/educere2005/anaisEvento/documentos/com/TCCI228.pdf> . Acesso em: jul. 2015.

DEARY, Ian J. *Intelligence*: a very short introduction. Oxford: Oxford University Press, 2001.

DEARY, Ian J.; WHALLEY, Lawrence J.; STARR, John M. *A lifetime of intelligence*: Follow-up studies of the Scottish Mental Surveys of 1932 and 1947. Washington, DC: American Psychological Association, 2009. Disponível em: <https://www.researchgate.net/publication/242788128>.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia do oprimido*. 9.ed. Rio de Janeiro: Paz & Terra, 1981.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. Rio de Janeiro: Paz & Terra, 1996.

FRY, A. F.; HALE, S. Relationships among processing speed, working memory, and fluid intelligence in children. *Biological Psychology*. Washington, DC, n. 54, p. 1-34, 2000.

GOLDSTEIN et al. (Eds.). *Handbook of intelligence*: evolutionary theory, historical perspective and current concepts. New York: Springer, 2014.

GOMES, C. M. A. Validade de construto do Conjunto de Testes de Inteligência Cristalizada (CTIC) da bateria de fatores cognitivos de alta ordem (BafaCaio). *Revista Interinstitucional de Psicologia*. Minas Gerais, p. 294-316, 2012.

GUIMARÃES, F. Uma aula de matemática e os saberes adjacentes. *Educação Matemática*. Portugal, v. 1, n. 35, 1995.

HAIER R. J.; JUNG, R. E. Brain imaging studies of intelligence and creativity: what is the picture for education? *Roeper Review*, n. 30, p. 171-180, 2008.

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática*: programa de ensino; guia para aulas livro 2. Brasil: Instituto Tim, 2013.

JONES, B. D.; BRYANT, L. H.; SNYDER J. D. S.; MALONE, D. *Preservice and inservice teachers' implicit theories of intelligence*. Virginia: Teacher Education Quarterly, 2012, p. 87-101.

JUNG R. E.; HAIER, R. J. *The parieto-frontal integration theory (P-FIT) of intelligence*: converging neuroimaging evidence. Novo México: Cambridge University Press, 2007, p. 1-47.

KONKIEWITZ, E. C. *Aprendizagem, comportamento e emoções na infância e adolescência*: uma visão transdisciplinar. Dourados, MS: Editora UFGD, 2013.

KURTZ-COSTES, B. et al. What does it mean to be smart? The development of children's beliefs about intelligence in Germany and the United States. *Applied Developmental Psychology*. Carolina do Norte, n. 26, p. 217-233, 2005.

MARCHESI, Álvaro; PÉREZ, Eva María. A compreensão do fracasso escolar. In: MARCHESI, Álvaro; GIL, Carlos Hernández (Cols.). *Fracasso escolar:* uma perspectiva multicultural. Porto Alegre: Artmed, 2004. p. 17-33.

MOYSÉS, M. A.; COLLARES, C. A. *A transformação do espaço pedagógico em espaço clínico*. São Paulo: FDE, 1997 (Série ideias, 23). p. 25-31.

NISBETT R. E. et al. Intelligence: new findings and theoretical developments. Revista *American Psychologist*, v. 67, n. 2, p. 130-159, 2012.

OLIVEIRA, G. G. Neurociências e os processos educativos: um saber necessário na formação de professores. 2011. Dissertação (Mestrado) – Universidade de Uberaba.

PERALVA, A. T.; SPOSITO, M. P. Quando o sociólogo quer saber o que é ser professor: entrevista com François Dubet. *Revista Brasileira de Educação*. São Paulo, n.5/6, p. 222-231, 1997.

PRIMI, R. *Inteligência fluida*: definição fatorial, cognitiva e neuropsicológica. Universidade de São Francisco, 2002. p. 57-75.

PRIMI, R. Inteligência: avanços nos modelos teóricos e nos instrumentos de medida. *Avaliação Psicológica*, n. 1, p. 67-77, 2003.

SBICIGO, J. B. et al. *Working memory and fluid intelligence*: the role executive processes, age and school type in children. *Universidade de Psicologia*. Bogotá, v. 13, n. 3, p. 935-946, 2014.

SCHAEFER, J. D. Early-life intelligence predicts midlife biological age. *Journals of Gerontology, Series B: Psychological Sciences and Social Sciences*, p. 1-8, 2015.

SCHAIE, K. W.; WILLIS, S. L.; CASKIE, G. I. L. The Seattle longitudinal study: relationship between personality and cognition. *Neuropsychol Dev Cogn B Aging Neuropsychol Cogn*. Pennsylvania, v. 11, n. 2/3, p. 304-324, Jun. 2004.

SCHEEFFER, R. *Introdução aos testes psicológicos*. 2.ed. Rio de Janeiro: Fundação Getúlio Vargas (FGV), 1968. Disponível em: <http://bibliotecadigital.fgv.br/dspace/bitstream/handle/ 10438/12003/48-2ed_000040714.pdf?sequence=1>. Acesso em: jul. 2015.

STERNBERG, R. J.; KAUFMAN, S. B. *The Cambridge handbook of intelligence*. USA: Cambridge University Press, 2011.

VIECILI, J.; MEDEIROS, J. G. A coerção em sala de aula: decorrências de seu uso pelo professor na produção do fracasso escolar. *Interação em Psicologia*, v. 2, n. 6, p. 183-194, 2002.

VIVEIRO, A. A.; DINIZ, R. E. As atividades de campo no ensino de ciências: reflexões a partir das perspectivas de um grupo de professores. *Revista Ciência em Tela.* São Paulo, v. 2, n. 1, p. 1-12, 2009.

WILLINGHAM, Daniel T. *Por que os alunos não gostam da escola?*: respostas da ciência cognitiva para tornar a sala de aula atrativa e efetiva. Porto Alegre: Artmed, 2011.

A quantidade de estudantes em sala de aula interfere no aprendizado?

Janaína Rodrigues de Almeida, Jaquellyne da Silva Barbosa e Vinicius Henrique Sbaiz

Introdução

É notório que existem muitas dificuldades no ensino de matemática no Brasil, sendo muitas destas relacionadas ao fato de os estudantes não serem capazes de relacionar os conteúdos apresentados em sala de aula com suas vivências cotidianas, o que acaba estimulando o desinteresse deles na matéria. O professor é uma peça-chave na mediação do conhecimento, devendo saber articular e conduzir discussões, transformando as aulas tradicionais de matemática, tornando-as atrativas, atuais e divertidas.

Os estudantes precisam fazer parte da aula, sentindo-se fundamentais para a construção de tudo o que for realizado. Podemos dizer que, para ser um bom professor, não basta ensinar, mas é necessário estar pronto a aprender com seus estudantes. Segundo Paulo Freire:

> O bom professor é o que consegue, enquanto fala, trazer o aluno até a intimidade do movimento de seu pensamento. Sua aula é assim um desafio e não uma *cantiga de ninar*. Seus alunos cansam, não dormem. Cansam porque acompanham as idas e vindas de seu pensamento, surpreendem suas pausas, suas dúvidas, suas incertezas (FREIRE, 1996, p. 33).

O processo de aprendizagem exige flexibilidade, pois cada indivíduo tem um tempo diferente de compreensão e absorção, o que supõe caminhos pedagógicos diferenciados para os estudantes. As aulas de matemática devem instigar a curiosidade, devem envolver os estudantes, também como afirma Freire:

> O exercício da curiosidade a faz mais criticamente curiosa, mais metodicamente 'perseguidora' do seu objeto. Quanto mais a curiosidade espontânea se intensifica, mas, sobretudo, se 'vigoriza', tanto mais epistemológica ela vai se tornando (FREIRE, 1996, p. 34)

Porém, como fazer para que as crianças sejam curiosas em uma aula de matemática? Como despertar seu interesse? Neste artigo, procuramos examinar alguns números da educação brasileira à luz da contribuição do Círculo da Matemática do Brasil, cuja abordagem é fundamentada na construção e no estímulo à participação de todos estudantes em sala de aula, para que a matemática seja trabalhada de uma maneira prazerosa e divertida.

Educação básica no Brasil

O Censo Escolar de 2015[1], publicado pelo Instituto Nacional de Estudos e Pesquisas Educacionais Anísio Teixeira (INEP), apresenta o total de 35.144.599 estudantes regularmente matriculados na rede pública de ensino. O número de estabelecimentos de educação básica do ano de 2015 ainda não foi publicado, entretanto, de acordo com a Sinopse Estatística da Educação Básica de 2014[2], no Brasil temos o total de 149.098 estabelecimentos desse nível educacional.

Após levantamento junto ao INEP, compilamos os dados entre os anos de 2007 e 2014, usando como ferramentas o Censo Escolar, a taxa de rendimento[3] e a Sinopse Estatística da Educação Básica; o período escolhido o foi de acordo com os dados publicados. A etapa escolar explorada é o ensino fundamental da rede pública, do 1° ao 9° ano. Para o ano de 2015, apenas o Censo Escolar está disponível para consulta, o que impossibilita uma comparação com a quantidade média de estudantes por sala de aula, por exemplo.

Os dados apresentados a seguir mostram a quantidade média de estudantes por sala de aula no período escolhido, dados coletados das Sinopses Estatísticas da Educação[4] e divididos por estado.

Média de estudantes por sala de aula – rede pública

	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Acre (AC)	24,1	24,2	24,1	23,9	23,4	23	22,7	22,5
Alagoas (AL)	30,9	30,2	29,6	28,6	28,5	27,9	27,3	27
Amapá (AP)	23,5	23,9	23,9	23,1	23,3	23,5	22,6	22

1 Dados coletados do Censo Escolar (INEP, 2015), disponível em: <http://portal.inep.gov.br/basica-censo>.
2 Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/basica-censo-escolar-sinopse-sinopse>.
3 Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/indicadores-educacionais>.
4 Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/basica-censo-escolar-sinopse-sinopse>.

Amazonas (AM)	27,3	27	26,2	25,7	25,1	24,9	24,4	24,1
Bahia (BA)	25,6	25,1	24,3	23,4	23	22,4	22,1	22,2
Ceará (CE)	24,5	24,1	24,2	23,7	23,5	22,7	22,5	22,9
Distrito Federal (DF)	31,3	30,6	30,1	29	28,6	27,3	26,3	25,9
Espírito Santo (ES)	24,6	24,5	24,1	23,7	23,5	23,2	22,9	22,6
Goiás (GO)	26,8	26,2	26	25,6	25,4	25,4	25,2	25,3
Maranhão (MA)	25	24,3	23,8	23	22,8	22,4	22,1	22,2
Mato Grosso (MT)	22,2	22	21,8	21,5	22,1	22	21,8	21,7
Mato Grosso do Sul (MS)	25	25,2	25,5	25,8	25,8	25,5	25,6	25,4
Minas Gerais (MG)	24,9	24,4	24	23,7	23,6	23,6	23,3	23,5
Pará (PA)	27,4	26,3	25,7	24,9	24,4	23,7	23,3	23,2
Paraíba (PB)	23,9	22,9	22,5	22	21,9	22	21,5	21,2
Paraná (PR)	26,8	26,6	26,1	25,7	25	24,6	24,1	24
Pernambuco (PE)	27,9	27,3	26,7	25,7	25,9	25,3	25,2	25,1
Piauí (PI)	20,8	20,3	19,8	19	19,1	19,3	19,9	20,1
Rio de Janeiro (RJ)	29,3	28,7	28,8	28	27,6	27,3	26,8	26,4
Rio Grande do Norte (RN)	24,6	24,8	25	24,4	24,1	23,7	23,8	24
Rio Grande do Sul (RS)	20,8	21,7	21,5	21,3	20,7	20,2	19,9	19,7
Rondônia (RO)	23,7	24,4	24,4	18,7	24	23,6	23,1	23,1
Roraima (RR)	20,5	20,4	20,5	21	21,1	20,4	20,4	20,4
Santa Catarina (SC)	22,5	22,6	22,6	22,9	22,1	21,7	21,8	21,5
São Paulo (SP)	31,2	30,9	29,9	29,5	29,1	28,4	28	27,7
Sergipe (SE)	25,7	25,2	24,4	24,5	24,8	24,3	24,2	23,9
Tocantins (TO)	22,1	22,6	22,4	22	22,1	22,8	23	23,1

Fonte: INEP.

Ao observar a quantidade média de estudantes por sala de aula, parece que temos um cenário positivo para o ensino. Entretanto, os dados acima levam em consideração as áreas rurais e urbanas de cada estado; além disso, outro compilado de dados referente à *taxa de rendimento*[5], também por estado, apresenta diversas oscilações.

Taxas de rendimento – rede pública

	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	2014
Acre (AC)	80,9	82,7	85,6	86,5	88,2	88,6	89,9	89,8
Alagoas (AL)	71,4	75,6	75,8	75,1	74,7	75,2	77,5	78,6
Amapá (AP)	80	81,1	82,5	85,3	86,2	85,5	85,5	85,3
Amazonas (AM)	75,9	76,2	77,2	80,1	83	83,5	85,6	87,2
Bahia (BA)	71,1	71,4	73,7	76,2	77,9	78,6	79,8	78,9
Ceará (CE)	82	82,6	85,4	87,1	88,3	89,2	90,9	91,2
Distrito Federal (DF)	80,7	87	86,3	86,1	85,2	84,2	86,6	85,6
Espírito Santo (ES)	83,6	83,5	84,3	86,7	85,8	85,8	86,6	86,3
Goiás (GO)	84,4	84,2	85,1	85,8	88,3	89,9	92,8	91,9
Maranhão (MA)	81,8	82,2	84,8	85,9	86,7	86,5	87,5	87,3
Mato Grosso (MT)	86,5	87,6	91,8	94,7	95,1	96,1	96,6	96,6
Mato Grosso do Sul (MS)	79,9	80,4	80,6	80,2	81,9	82,6	83,9	83,7
Minas Gerais (MG)	85	85,5	87,2	88,9	90,1	90,7	93,4	93,1
Pará (PA)	71	72,9	77	81	83	82,3	82,4	81,9
Paraíba (PB)	71,8	72,7	74,6	75,5	79	80,1	81,6	82
Paraná (PR)	86,8	86,7	88,2	87,8	87,8	87,9	88,9	89
Pernambuco (PE)	71,8	73,5	77,7	80,9	81,5	81,9	83,4	83,8
Piauí (PI)	75,8	76,4	79,7	81,7	82,6	81,5	83,8	83,2
Rio de Janeiro (RJ)	81,8	80,5	78	79,8	82,4	83,8	84,6	83,5
Rio Grande do Norte (RN)	74	73,5	74,2	76	76,5	78	78,8	78,8
Rio Grande do Sul (RS)	82,8	82,9	82,7	83,2	84,3	86	86,2	86,6
Rondônia (RO)	80,3	80,1	81,2	81,2	81,9	83,6	86,7	86,6

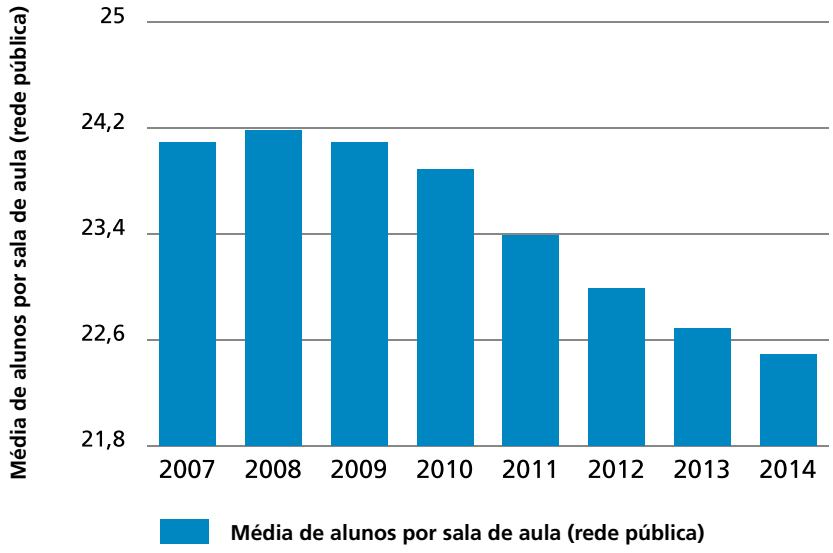
5 A taxa de rendimento é a taxa de aprovação, nos níveis de ensino fundamental de 8 e 9 anos, segundo as unidades da Federação.

Roraima (RR)	84,2	85,2	87,2	88	87,5	85,5	88,8	88,7
Santa Catarina (SC)	89,8	90,2	90,5	92,7	94,4	93,4	91,7	92,5
São Paulo (SP)	91,7	92,7	93,3	93,7	93,6	94,3	94,6	94,4
Sergipe (SE)	69,8	66,8	70	70,8	72,6	74,6	74,9	74,6
Tocantins (TO)	87,4	87,2	88,7	88,4	88,8	88,8	89,7	88,2

Fonte: INEP.

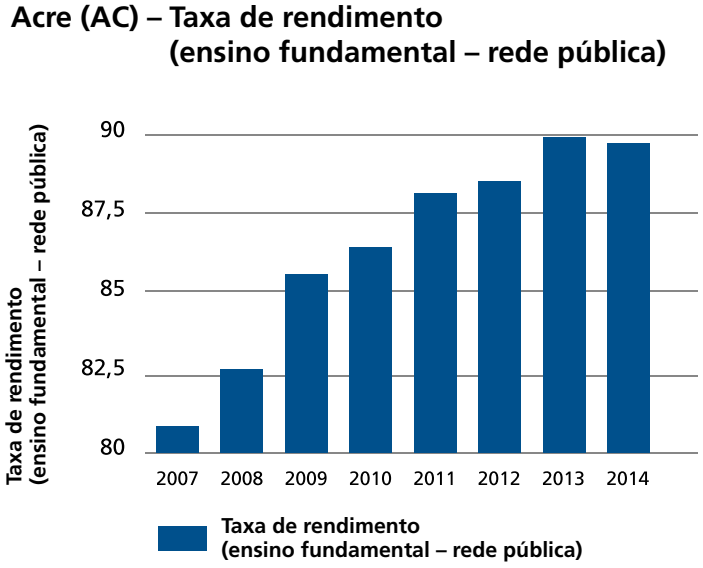
Analisando os dados do Acre, por exemplo, podemos observar a diminuição do número de estudantes por sala de aula no decorrer dos anos. Em 2007, o número de estudantes regularmente matriculados no ensino fundamental nesse estado era de 146.032, distribuídos em 1.545 estabelecimentos de ensino; em 2014, o total era de 151.917 estudantes com apenas 1.464 estabelecimentos de ensino, mas, ainda assim, ocorreu uma redução na média de estudantes por sala.

Acre (AC) – Média de alunos por sala de aula (rede pública)



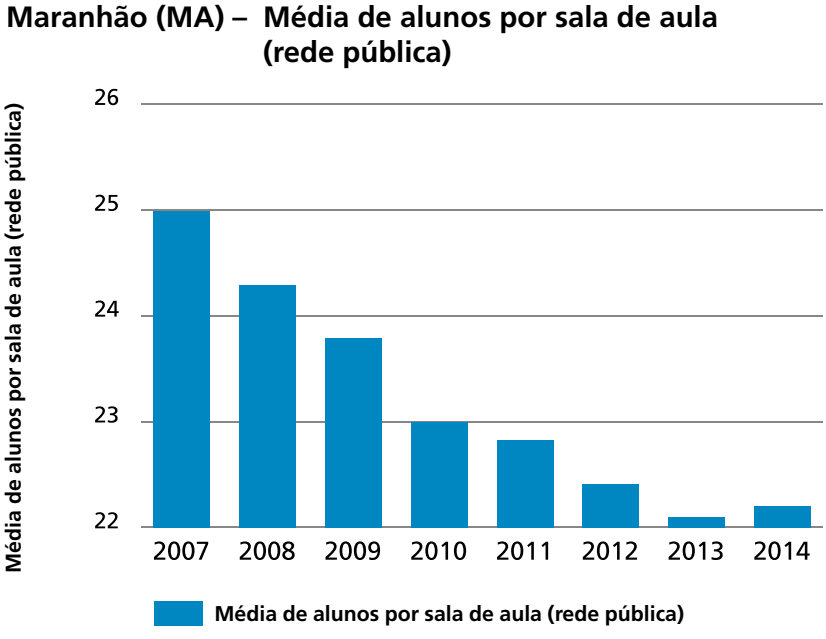
Fonte: INEP.

O próximo gráfico demonstra a evolução das taxas de rendimento do mesmo período.



Fonte: INEP.

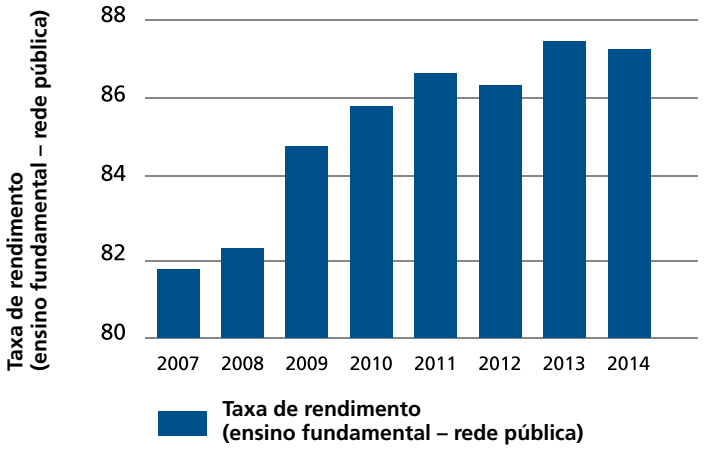
Assim, podemos observar que, ao passo em que diminui a quantidade média de estudantes em sala de aula, aumenta a taxa de rendimento. O estado do Maranhão segue o mesmo padrão, como indica o gráfico abaixo:



Fonte: INEP.

O próximo gráfico deixa ainda mais clara a correlação entre a quantidade média de estudantes e a taxa de rendimento.

Maranhão (MA) – Taxa de rendimento (ensino fundamental – rede pública)



Fonte: INEP.

Diante dos dados brutos, podemos observar que todos os estados acompanham esse padrão, excerto Sergipe e Tocantins, o que indica que a quantidade média de estudantes em sala de aula tem impacto direto na taxa de rendimento, e por consequência, quanto menor for o tamanho da turma, maior será seu aprendizado.

Quantidade de estudantes em sala de aula

Os resultados apresentados nos últimos cinco anos quanto à educação básica no Brasil são, no mínimo, preocupantes. De acordo com pesquisas realizadas em 2012 pela *Economist Intelligence Unit* – respeitada consultoria especializada em sistemas de ensino no mundo –, o Brasil se encontra em penúltimo lugar no *ranking* de qualidade da educação, no qual foram analisadas as habilidades cognitivas e o desempenho escolar dos estudantes de 40 países.

Além da má formação do professor, da superlotação das salas de aula e da baixa remuneração, um dos principais fatores apontados no desenvolvimento do processo de ensino-aprendizagem tem como base o relacionamento entre professores e estudantes, um tema investigado por meio de diferentes estratégias metodológicas, destacando a questão da *disciplina* em sala de aula.

É visível que os professores sentem dificuldades para se relacionar com os estudantes de forma aberta e conveniente, visto que estratégias como o autoritarismo ou o tradicionalismo esperam disciplina por parte dos estudantes, seguindo um currículo pré-estabelecido, segundo o qual, na sala de aula, o professor ensina e dá ordens, e os estudantes, por sua vez, aprendem e obedecem. Ademais, esse cenário pode acabar produzindo situações de conflito, o que prejudica ainda mais essa relação e o aprendizado.

O projeto *Student-teacher Achievement Ratio* (STAR), de Mosteller, apresenta ganhos extras em turmas pequenas nas séries iniciais, o que permanece mesmo após os estudantes serem remanejados para turmas de tamanho-padrão nas séries posteriores (MOSTELLER, 1995, p. 121-122). Tais ganhos são os seguintes: melhor desempenho em testes, melhor aprendizado e melhor performance, mesmo a longo prazo. O estudo em questão foi realizado no Tennessee (EUA), analisando turmas reduzidas (com 13 a 17 estudantes), turmas de tamanho-padrão (com mais de 20 estudantes) e turmas de tamanho-padrão, mas com aulas suplementares. Os estudantes que participaram deste estudo deveriam permanecer nas respectivas escolas pelo período mínimo de quatro anos, acompanhando o desenvolvimento e os resultados ao longo dos anos iniciais. Os resultados obtidos na aplicação de testes nacionais demonstraram um melhor desempenho dos estudantes que pertenciam às turmas reduzidas, tanto em leitura quanto em matemática, como mostra a tabela abaixo:

Summary of Project STAR Results in Terms of the Percentile Ranks of Average Scores Based on National Test Norms

	Percentile*			
Grade level	**K**	**1**	**2**	**3**
Total reading SAT				
Small	59	64	61	62
Regular without an aide	53	53	52	55
Regular with an aide	54	58	54	54
Total reading SAT				
Small	66	59	76	76
Regular without an aide	61	48	68	69
Regular with an aide	62	51	69	68

* Percentile ranks are based on Stanford's Multilevel Norms.

Fonte: WORD, E. et al. apud MOSTELLER, 1995, p. 113.

Outro ponto interessante: os estudantes das turmas pequenas apresentaram uma maior taxa de conclusão dos estudos e melhores resultados ao longo da vida escolar. Para Mosteller, "a evidência é forte de que classes reduzidas no início da experiência escolar melhoram o desempenho das crianças em testes cognitivos" (MOSTELLER, 1995, p. 123).[6]

A importância das turmas reduzidas está relacionada não apenas à aprendizagem, mas também ao *desenvolvimento humano*. Segundo Barnett, Schulman e Shore), em uma pesquisa realizada com estudantes da pré-escola, em turmas reduzidas, os benefícios são de longo prazo, como, por exemplo, maiores taxas de conclusão do ensino secundário e menores taxas de delinquência e prisões (BARNETT; SCHULMAN; SHORE, 2004, p. 2). A relação entre professores e estudantes se torna mais estreita, e o tempo antes gasto para disciplinar a turma, é utilizado para ministrar conteúdos mais ricos, propor discussões o que, por consequência, ocasiona um aprendizado de melhor qualidade. Além do que ocorre no campo educacional, também foi notório o aumento da qualidade na saúde e na segurança das crianças.

Fischer e Grant (1983) descobriram que o tamanho da classe afeta significativamente o nível das habilidades cognitivas utilizadas pelos estudantes em sala de aula. Em turmas pequenas (com até 15 estudantes), quando os estudantes respondem às questões colocadas por um instrutor, o nível médio de pensamento – usando a terminologia de Bloom – apresentado por seu discurso foi o de análise[7]; nas classes médias (de 16 a 45 estudantes), o discurso dos estudantes foi caracterizado por um nível mais baixo de pensar-compreensão; e em classes grandes (mais de 46 estudantes), na maioria das vezes, o discurso dos estudantes que participaram em sala de aula refletiu o menor nível de recordação pensamento-factual.

Ao introduzir dois estudos nos extremos da educação básica, é possível verificarmos as diferenças e as consequências com relação ao tamanho das turmas: no cenário atual, estudantes e professores são os maiores prejudicados. Em 2014, no Brasil[8], a média de estudantes por turma do ensino fundamental era de 23,9, e, no ensino médio, era de 31, chegando a extremos como 27,7 e 32,7 por turma, respectivamente. Entretanto, apesar dos levantamentos de dados, sabemos que, algumas vezes, é possível nos depararmos com turmas com mais de 35 estudantes. Pensando nisso, imaginemos que, durante uma

6 Tradução livre do trecho: "*The evidence is strong that smaller class size at the beginning of the school experience does improve the performance of children on cognitive tests*" (MOSTELLER, 1995, p. 123).
7 O estudante distingue, classifica e relaciona pressupostos, hipóteses, evidências ou estruturas de uma declaração ou questão. *Taxonomia da aprendizagem:* taxonomia de Blum. Disponível em: <http://www.ead.unifei.edu.br/arquivos/Dicas_objetivos.pdf>.
8 Conteúdo extraído de: INEP. *Indicadores educacionais*. Disponível em: <http://portal.inep.gov.br/indicadores-educacionais>.

aula de 45 minutos, em uma sala que tem aproximadamente de 40 a 50 estudantes, o professor deve conseguir expor o conteúdo planejado, esclarecer possíveis questões e ainda verificar se os estudantes realizaram as atividades propostas anteriormente. Inseridos nesse contexto, será que todos os estudantes terão a atenção do professor? Ou ainda, eles serrão prejudicados quanto ao processo de aprendizagem?

Antes de debater a fundo essa questão, é importante destacarmos que, de acordo com uma pesquisa que realizamos com professores da rede pública de ensino[9], grande parte deles relatou que a superlotação das salas de aula traz consequências extremamente negativas para o ambiente escolar, uma vez que, nessa situação, os professores não conseguem desenvolver de modo satisfatório o conteúdo, e os estudantes não são capazes de compreendê-lo, sanar dúvidas ou expressar a sua opinião.

Uma das perguntas realizadas na pesquisa foi: "Você acredita que a quantidade de estudantes em sala de aula influencia no aprendizado?". A resposta foi unânime: "Sim!" A pergunta seguinte foi: "Por quê?". Os professores entrevistados expressaram suas opiniões, abaixo:

> "Atualmente, há uma busca pela qualidade na área educacional. Tendo excesso de alunos em sala de aula, dificulta a participação dos mesmos e gera atrasos no desenvolvimento escolar. A criança merece toda atenção do professor e, por sua vez, o professor se sente perdido, pois o professor não consegue ajudar os seus alunos de forma satisfatória. É impossível, no meu caso estágio II, dar uma atividade diferente no qual os alunos precisam se movimentar. O trabalho em grupo, ou em círculo ajuda muito na aprendizagem, mas é necessário espaço para isso, e com 35 não é possível".
>
> **(Vera Lúcia Ortega Cacavalli, leciona desde 1973, turma com 35 estudantes, EPG Castro Alves)**

> "Muitos alunos presentes numa mesma sala de aula podem propiciar uma certa desordem e deixar o professor, que precisa controlar e reger a turma, desorientado e estressado. Além disso, acredito que há um número máximo de alunos para garantir que todos dialoguem e que se estabeleçam discussões significativas em sala de aula".
>
> **(Viviane Hummes, leciona há sete anos, turma com 20 estudantes, Escola Municipal de Ensino Fundamental Mario Quintana)**

9 Questionário formulado pelos autores deste artigo, disponível em: <https://docs.google.com/forms/d/1OKvvvYICTmqbek_chlVl1CYXtVIqhL3V7_flXG6FU1E/viewform>.

"Com uma maior quantidade de alunos, além de eles perdem a atenção, fica difícil para o professor atender a todos".

(Luciane Sousa, leciona há oito anos, turma com 30 estudantes)

"Porque todo aluno necessita de uma atenção individualizada. O número elevado dificulta esse processo".

(Adriana, leciona há seis anos, turma com 30 estudantes, EMEF Ibrahim Nobre)

É preciso que os estudantes desenvolvam seu raciocínio, tendo uma presença ativa e participativa, não passiva, como atualmente acontece nas escolas. Com turmas superlotadas, essa interação se torna impossível, o que causa frustração em estudantes e professores.

Após sua pesquisa, Waiselfisz (2000) deduziu que existem situações que demandam uma intensa relação do professor com seus estudantes, o que torna benéfico o trabalho com turmas reduzidas. Ele também afirma que o tamanho da turma traz benefícios somente se é substancial e se esse tamanho é abaixo de um certo "limiar", que deveria ser de 20 estudantes por professor, nas turmas reduzidas.

Teoricamente, é como se cada estudante tivesse as condições necessárias de receber uma porção maior dos recursos instrucionais representados pelo tempo do professor e, consequentemente, melhores condições de aprendizagem. Ou seja, quanto menor for o número de estudantes em uma turma, mais favoráveis serão as condições para que o professor tenha um melhor relacionamento com seus estudantes, de uma maneira mais dedicada e específica, respeitando as necessidades de cada um deles.

Aprendizagem com turmas reduzidas: a experiência do Círculo da Matemática do Brasil

Estudantes do projeto O Círculo da Matemática do Brasil

Os professores Bob e Ellen Kaplan desenvolveram o projeto *The Math Circle*, segundo o qual, para que os estudantes tenham uma melhor compreensão do conteúdo matemático, é necessário que estejam um contexto agradável, onde poucas mentes conseguem desfrutar de uma busca conjunta, com todos se esforçando, sem se preocupar com o tempo ou com a competitividade:

> Em nosso Círculo da Matemática, nós não fazemos perguntas difíceis, nem colocamos os estudantes a competir uns contra os outros a fim de conseguir um vencedor pomposo e uma sala inteira de perdedores. Nós visamos deixar sua curiosidade livre em um mistério acessível – com uma daquelas questões que estão apenas um pouquinho além de suas competências, de modo que eles mergulhem nelas juntos, em um tom de conversa, tentando diferentes

> abordagens, redesenhando a questão, testando uma conjectura, refinando seus termos, desistindo de um insight e apreendendo um outro, esforçando-se para provar o mais provável e então dando um passo atrás para ver o que eles criaram – em resumo, fazendo matemática (INSTITUTO TIM, 2014a, p. 9).

Além disso, devem ocorrer conversas que permitam que diversos pontos de vista se reflitam de formas diferentes em um todo, aumentando a agilidade dos estudantes e deixando-os à vontade o suficiente para que sejam capazes de se desenvolver por si próprios, sem depender do professor – que, nesse ambiente, exerce apenas o papel de *facilitador* – mas destemidos para questionar o que quiserem:

> O primeiro desafio é fazer com que o grupo trabalhe de forma cooperativa – nem passivamente, tampouco competitivamente. Tê-los fixos em você é lisonjeiro, e ajuda a fazer com que a turma se mova na mesma direção, mas deixá-los fixos ao problema é o nosso objetivo. Os estudantes não deveriam sentar e apreciar o seu entusiasmo; eles deveriam estar entusiasmando você (INSTITUTO TIM, 2014b, p. 12).

É muito importante que os estudantes consigam se desenvolver a partir de todas as discussões realizadas em sala de aula:

> [...] permitindo que eles descubram por si mesmos: pois somente desta forma suas forças serão desenvolvidas, juntamente com o orgulho em si mesmos e em seus colegas (INSTITUTO TIM, 2014b, p. 9).

O professor deve ser sempre, nas palavras dos professores Kaplan, "um bom ou boa 'escutador(a)'. Muitas vezes, ensinar é confundido com falar, quando escutar é tão ou mais importante". É necessário que o professor "simplifique tanto quanto possível [as] questões complexas", e mais do que isso, que "traduza pensamentos complexos em pensamentos simples". Isso ajuda "seus alunos(as) a entender os problemas, dando a eles uma ponte de acesso a maneiras mais simples de pensar" (INSTITUTO TIM, 2014a, p. 6).

A estrutura proposta tem como objetivo propiciar um ambiente harmônico e cooperativo. Todas as atividades são discutidas em um semicírculo, e a troca de ideias favorece a construção do raciocínio em conjunto. O retorno é sólido, uma vez que todos os estudantes têm acesso ao professor, e este, por sua vez, com a devida atenção e o auxílio na formalização matemática, é capaz de tornar a aula mais atrativa e alcança melhores níveis de qualidade. Por isso, é necessário que a quantidade de estudantes

em sala de aula não seja elevada, como ocorre na prática atual, uma vez que a ideia é esta: ao desenvolver seu raciocínio, o estudante deve estar aberto para ouvir sugestões dos demais colegas, fazendo com que o seu desempenho atinja níveis crescentes e supere as expectativas.

Para os professores Kaplan, a teoria que relaciona os números com a quantidade necessária para cada turma foi customizada para as especificidades de cada caso. Assim, o tamanho da turma deveria ser de, pelo menos, cinco, idealmente dez e, no máximo, 15 estudantes. A quantidade mínima de cinco estudantes é defendida pelos professores Kaplan, que afirmam que, para o método *The Math Circle* funcionar corretamente, é necessária a existência de pelo menos cinco pessoas para assumir os papéis de: aquele que não acredita, aquele que precisa conjecturar para acreditar, aquele que precisa de exemplos para acreditar, aquele que precisa de provas para acreditar e aquele que precisa criticar para acreditar (KAPLAN; KAPLAN, 2004, p. 167).[10] Estes são papéis fundamentais para uma discussão rica e eficiente.

Assim, qualquer problema apresentado terá sobre ele um olhar mais generalizante, uma vez que todos terão opiniões diferentes. Ao aumentarmos a quantidade para acima de 15 estudantes, eles irão se sobrepor uns aos outros e, com isso, o entendimento das discussões será perdido. É importante estar ciente de quem está dando as sugestões, ou expondo o ponto de vista dentro da sala; se a quantidade de estudantes for superior a 15, esse processo fica comprometido. Agora, com turmas menores, a interação dos estudantes é mais clara e mais rica, pois todos terão espaço para expor suas linhas de raciocínio, propiciando uma discussão direcionada à compreensão de todos sobre o tema abordado; assim, todos chegarão a um consenso, descobrindo as respostas em conjunto.

Destacamos, dessa forma, uma justificativa plausível enfocando o desenvolvimento do estudante e tendo como principal objetivo promover o maior ganho possível no processo de aprendizagem. Turmas nessas condições trazem um ganho significativo para o desenvolvimento e o amadurecimento das crianças. Para aproveitar e explorar ao máximo, precisamos ter um ambiente cooperativo, no qual a busca pelas respostas ocorra em caminhos oriundos de uma discussão prazerosa, tendo como fundamento a visão dos estudantes, abstraindo-se suas ideias e retornando sempre ao início, a fim de sanar dúvidas e fixar as principais conclusões.

10 Tradução livre do trecho: "*After the preliminary sorting by age, we aim for classes of at least five, ideally ten, and at most fifteen students. Diversity, again, dictates these limits. You need at least five people to take on the inevitable roles of doubter, conjecturer, exemplifier, prover, and critic (of which more later), and to make looking at a problem sufficiently stereoptical. More than fifteen and conversation begins to overlap and fracture, with no one sure of what was said by whom – including oneself. A collection, then, of a size to become a cohort*" (KAPLAN; KAPLAN, 2007, par. 2, p. 167).

Conclusão

O panorama apresentado da educação de nosso país, assim como sua infraestrutura, demonstra os problemas que os professores brasileiros enfrentam diariamente: a maior parte do tempo em sala de aula acaba sendo destinado a manter a ordem, a exercer trabalhos administrativos, entre outros, deixando-se em segundo plano o real propósito da escola, que é o *aprendizado*. A superlotação das turmas sobrecarrega os professores, o que se reflete na baixa qualidade e no baixo desempenho nas salas de aula. Essa realidade deve mudar.

Diversos levantamentos evidenciam a problemática de tal superlotação, que acarreta danos no longo prazo. Podemos nos questionar, por exemplo, quanto ao motivo de escolas de idiomas defenderem turmas pequenas, de sete a 10 estudantes, ou então, de escolas particulares que seguem a mesma linha de raciocínio. Se pensarmos em uma simples reunião de trabalho, a troca de ideias de 15 ou mais funcionários será realmente produtiva? Todos serão ouvidos com a devida atenção? Agora, em uma sala de aula, tendo como locutor uma única pessoa, que deve ouvir ao mesmo tempo pelo menos 30 pessoas, suprir as necessidades de cada indivíduo e ainda se fazer entender por todos, parece-nos uma tarefa bem difícil. Porém, essa é a realidade das nossas escolas, sejam elas municipais, estaduais ou federais.

O grande papel do professor consiste em levar aos seus estudantes a maior quantidade possível de conhecimento, desenvolvendo suas capacidades de raciocínio em um ambiente escolar produtivo e de qualidade. Trabalhar com poucas crianças, em turmas menores, possibilita uma aproximação mais intensa entre professor e estudantes, um acompanhamento individualizado com laços de afetividade, o que acaba tornando as aulas mais atrativas, mesmo as de matemática.

A metodologia dos professores Kaplan estimula uma aula "em círculo", na qual não existem lados e na qual todos participam ativamente do processo de construção, descentralizando o papel do professor como detentor do "poder" e construindo, assim, uma relação próxima dele com cada estudante.

Com turmas menores, o desenvolvimento humano é muito mais rico, comportamentos inadequados são mais facilmente contidos, o respeito mútuo aparece de forma natural, o convívio social se torna mais agradável, a elevação da autoestima é solidificada e, consequentemente, é construído um ambiente seguro, justo e afetivo, o que produz ganhos por toda a vida.

Bibliografia

AÇÃO EDUCATIVA. *Indicadores da qualidade na educação*. São Paulo, 2004.

BECKERS, Iohanna Elizabeth; PEREIRA, Josefa Lídia Costa; TROGELLO, Anderson Giovani. O processo de ensino-aprendizagem de Ciências em turmas com alunos deficientes visuais: percepções de professores. *Revista Educação Especial*, v. 27, n. 48, p. 127-140, 2014.

BIDDLE, Bruce J.; BERLINER, David C. *Policy perspectives*: what research says about small classes & their effects. WestEd, [s.d.]. Disponível em: <https://www.wested.org/resources/what-research-says-about-small-classes-and-their-effects/>.

BRASIL. Constituição (1988). *Constituição da República Federativa do Brasil de 1988*. Brasília: Presidência da República, 1988. Disponível em: <http://www.planalto.gov.br/ccivil_03/constituicao/constituicao.htm>.

CABRAL, Fábia Moreira Squarça; CARVALHO, MAV de; RAMOS, Rosângela Mancini. Dificuldades no relacionamento professor/aluno: um desafio a superar. *Paidéia.* Ribeirão Preto, v. 14, n. 29, p. 327-335, 2004.

FERNANDES, E. Caminhos que levam a um aprendizado melhor. *Nova Escola,* n. 243, jun./jul. 2011. Disponível em: <http://revistaescola.abril.com.br/ formacao/caminhos-levam-aprendizado-melhor-636186.shtml?page=3#>. Acesso em: 10 jun. 2015.

FONSECA, Marília. Políticas públicas para a qualidade da educação brasileira: entre o utilitarismo econômico e a responsabilidade social. *Cadernos Cedes*. Campinas, v. 29, n. 78, p. 153-177, 2009.

FREIRE, P. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. 36.ed. São Paulo: Editora Paz e Terra, 1996.

FUNDAÇÃO VICTOR CIVITA. *Nossas ações*. [s.d.]. Disponível em: <http://www.fvc.org.br/estudos-e-pesquisas/avulsas/estudos1-1ser-professor.shtml> Acesso em: 17 jul. 2015.

HANSEN, Michael. *Right-sizing the classroom:* making the most of great teachers. 2013. Disponível em: <http://www.themathcircle.org/>. Acesso em: 17 jul. 2015.

HELENE, Otaviano. Quantidade versus qualidade no sistema educacional. Correio da Cidadania, 01 mar. 2012. Disponível em: <http://www.correio cidadania.com.br/index.php?option=com_content&view=article&id=6858: submanchete010312&catid=25:politica&Itemid=47>. Acesso em: 17 jul. 2015.

IDOETA, Paula Adamo. Brasil desperdiça um dia de aula por semana. *BBC Brasil*. São Paulo, 20 nov. 2014. Disponível em: <http://www.bbc.com/portuguese/noticias/2014/11/141117_entrevista_bruns_educacao_pai>. Acesso em: 20 jul. 2015.

INEP. *Censo da educação básica*, *2007*: resumo técnico. Brasília, 2008.

INEP. *Censo da educação básica, 2007*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2008.

INEP. *Censo da educação básica, 2008*: resumo técnico. Brasília, 2009.

INEP. *Censo da educação básica, 2008*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2009.

INEP. *Censo da educação básica, 2009*: resumo técnico. Brasília, 2010.

INEP. *Censo da educação básica, 2009*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2010.

INEP. *Censo da educação básica, 2010*: resumo técnico. Brasília, 2011.

INEP. *Censo da educação básica, 2010*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2011.

INEP. *Censo da educação básica, 2011*: resumo técnico. Brasília, 2012.

INEP. *Censo da educação básica, 2011*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2012.

INEP. *Censo da educação básica, 2012*: resumo técnico. Brasília, 2013.

INEP. *Censo da educação básica, 2012*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2013.

INEP. *Censo da educação básica, 2013*: resumo técnico. Brasília, 2014.

INEP. *Censo da educação básica, 2013*: sinopse estatística da educação básica. Brasília, 2014.

INEP. *Censo da educação básica,* 2014. Brasília, 2015.

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática do Brasil:* programa de ensino; guia do educador, caderno 1. Porto Alegre, 2014a. Disponível em: <http://www.ocirculodamatematica.com.br/wp-content/uploads/2014/04/Caderno1_DIG.pdf>. Acesso em: 04 fev. 2016.

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática do Brasil*: programa de ensino; guia para as aulas, caderno 2. Porto Alegre, 2014b. Disponível em: <http://www.ocirculodamatematica.com.br/wp-content/uploads/2014/04/Caderno2_DIG.pdf>.

KAPLAN, Robert; KAPLAN, Ellen. *Out of the labyrinth*: setting mathematics free. USA: Bloomsbury Publishing, 2013.

MOSTELLER, Frederick. The Tennessee study of class size in the early school grades. *The Future of Children*, p. 113-127, 1995. Disponível em: <http://www.jstor.org/stable/1602360?seq=2&loginSuccess=true&loginSuccess=true#page_scan_tab_contents>.

PORVIR. A variável que mais importa: o professor. *Porvir: Inovações em Educação*. 14 jan, 2014. Disponível em: <http://porvir.org/variavel-mais-importa-professor/>. Acesso em: 20 jul. 2015.

QUANTIDADE não é qualidade. *Direcional Escolas*, 3 fev. 2014. Disponível em: <http://direcionalescolas.com.br/2014/02/03/quantidade-nao-e-qualidade/>. Acesso em: 05 ago. 2015.

QUEIROZ, Christina Stephano de. Salas cheias. *Revista Educação*, 12 jan. 2015. Disponível em: <http://www.revistaeducacao.com.br/salas-cheias/>. Acesso em: 05 ago. 2015.

VICTER, Eline das Flores; LOPES, Jurema Rosa; SOUZA, Antonio Carlos de. Uma discussão sobre a aprendizagem significativa: o olhar do professor e dos alunos. *Almanaque Multidisciplinar de Pesquisa*, v. 1, n. 2, 2015.

WAISELFISZ, Jacobo. *Tamanho da turma*: faz diferença? Brasília: Fundescola/MEC, 2000.

O Círculo da Matemática e seus efeitos nos "estudantes bagunceiros"

Ana Cecilia Espírito Santo Queiroz e Ana Julia Carvalho Maia

Introdução

Ao longo da história, a educação sempre foi vista como uma forma de ascensão social, de se compreender o mundo, de se tornar um ser crítico e intelectual. Quando crianças, cansamos de ouvir de nossos pais, avós ou alguém mais velho dizer: "Olha, você tem que ir à escola e estudar muito, para não ficar burro e puxar uma carroça!". E quando o assunto era matemática: "O Paulinho já sabe de cor a tabuada, é muito inteligente!" – mas quando chegamos à escola, tudo é muito diferente do que pensamos. Na escola, não aprendemos a ser críticos, não entendemos como o que é ensinado lá pode nos ajudar a crescer, a não sermos "burros". Não entendemos por que aprender matemática, afinal, ela é "chata". Não há sentido, então, por que obrigar os estudantes a memorizar tais assuntos?

Segundo Gadotti: "O que acontece conosco é que se o que aprendemos não tem sentido, não atende alguma necessidade, não 'aprendemos'. O que aprendemos tem que 'significar' para nós" (GADOTTI, 2002, p. 47).

Portanto, será que para os estudantes há sentido no que é ensinado em sala? Nossos estudantes e professores estão felizes com a atual gestão de sala? Para que estamos educando nossas crianças? E se os estudantes não obedecem às regras? Eles são "bagunceiros", "burros", "preguiçosos"? Esses questionamentos são complexos, mas a seguir tentaremos respondê-los, ou pelo menos indicar, e questionar ainda mais o sistema educacional.

O que nos apresenta o projeto Círculo da Matemática do Brasil é uma abordagem que visa a despertar a autoestima das crianças e o gosto pela matemática. Os relatos apresentados neste texto mostram como precisamos saber escutar mais as nossas crianças e deixar que elas desenvolvam sua autonomia, dentro e fora de sala. Por meio desses relatos e do pensamento de alguns autores citados aqui, vemos o quanto se fazem necessárias mudanças no ensino e na forma como a matemática é apresentada aos estudantes.

A sala de aula

No contexto atual, encontramos salas lotadas, quentes, com dois ou três ventiladores funcionando, um professor que mantém a turma sob a organização de cadeiras enfileiradas, estudantes que copiam os assuntos do quadro ou apenas fixam os conteúdos já dispostos no livro; um ou outro estudante tenta, de alguma forma, demonstrar o desgosto por essa "prisão", mas logo o professor o faz retornar ao seu lugar ou recebe alguma punição, como, por exemplo, ir para a coordenação da escola. Tudo isso com a finalidade de concluir o mais rápido possível o conteúdo, pois existe um calendário a ser cumprido. E os estudantes devem seguir as regras, "engolir a seco" o assunto transmitido pelo professor, sem direito à escolher, à dúvida e ao desafio, apenas de memorizar as fórmulas, as regras, a gramática. Porém, se algum estudante foge a essa organização, logo é classificado, rotulado como "bagunceiro". Ou, às vezes, isso pode ocorrer com uma turma inteira, e com isso resultam tais classificações, rótulos e hierarquias dentro da sala de aula. Podemos comprovar, em Foucault:

> A organização de um espaço serial foi uma das grandes modificações técnicas do ensino elementar. [...] Determinando lugares individuais tornou possível o controle de cada um e o trabalho simultâneo de todos. Organizou uma nova economia do tempo de aprendizagem. Fez funcionar o espaço escolar como uma máquina de ensinar, mas também de vigiar, de hierarquizar, de recompensar (FOUCAULT, 2013, p. 142).

O motivo para se impor tal autoridade está na justificativa de preparar a pessoa para a vida e o mercado de trabalho, como comenta Fernández Erguita: "Muitos professores não veem nisso um problema, pois consideram que aceitar a autoridade é parte da transição à vida adulta, que é necessário para uma presença não conflitiva e uma atividade eficaz em contextos adultos" (ERGUITA, 1989).

Contudo, essa forma de obter autoridade será mesmo uma preparação para a vida adulta? Nossas crianças não têm o direito à escolha, e o aprendizado se transformou em mercadoria. Elas são preparadas para o vestibular, para o mercado de trabalho, para a vida adulta, a fim de atender aos segmentos de uma sociedade. Então, vemos na escola uma *fábrica*. Rubem Alves, em entrevista à psicóloga e psicanalista Viviane Mosé, fala-nos que o sistema educacional é uma imitação da linha de montagem de uma fábrica, na qual as crianças estão como em uma esteira e a cada fase são "parafusadas". Para isso, é necessário disciplinar os estudantes, no olhar, nas normas e também por meio de avaliações, como nos fala Foucault, "sobre os recursos para o bom adestramento" (FOUCAULT, 2013).

Porém ensinar não consiste nas normas, nos livros, na autoridade que é imposta pelo professor. O que normalmente acontece para que este possa transmitir o conteúdo proposto pelo sistema educacional, e diante de uma sala lotada, é o meio "eficaz" para conseguir tal propósito. Ou os estudantes "aprendem" para passar dessa fase do sistema, ou se revoltam contra o que lhes é imposto.

Quanto ao fato de o aluno ser rebelde, não é porque existe algum problema de ordem médica, e sim porque ele não vê onde os conteúdos propostos em sala podem ajudá-lo no seu dia a dia. Para que haja um sentido no que se aprende, o professor deve respeitar a liberdade dos estudantes, despertar sua curiosidade pelo ambiente que o cerca.

Os bagunceiros

Dentro da experiência em sala por meio do Círculo da Matemática do Brasil, deparamo-nos com a realidade da educação. Vemos que, apesar dos avanços, nossas crianças ainda permanecem prisioneiras de um molde ou modelo a ser alcançado. Eis o fator que leva muitos à infelicidade, à morte de suas ideias, do seu projeto de vida. Porque o professor deve seguir um calendário, e o estudante deve seguir as normas e passar nos testes. Assim, como nos diz Rubem Alves: "Então todo mundo sofre, sofrem as professoras, por causa da indisciplina, sofrem os alunos, por causa da escola. Todo mundo sofre, não se ensina nada, não se aprende nada. Então, o que se quer? Se quer um diploma" (MOSÉ, 2014).

Os estudantes que apresentam um comportamento de rebeldia em sala, na verdade, tentam demonstrar a sua insatisfação com o sistema. A partir da vivência em sala, esses estudantes ditos "bagunceiros" apresentam certas características comuns: são inquietos, a primeira regra da sala que eles procuram infligir é não permanecer sentado, não terminam a lição e agitam também os colegas de classe. Os pais, os professores ou outras pessoas que têm conhecimento das atitudes desse estudante pensam que ele não tem interesse ou que é pouco inteligente, mas, na verdade esse estudante não vê sentido no que lhe é ensinado.

Um exemplo do rótulo que é criado para esse estudante: Pedro[1], que sempre estava na diretoria devido a algum desvio de conduta e que, inclusive, havia sido transferido do turno da manhã para o da tarde por mau comportamento, em seu primeiro dia de aula no Círculo, mostrou desinteresse e até causou euforia na pequena turma; ele disse que não queria fazer nada, que preferia desenhar e se pôs embaixo da mesa da sala.

1 Trata-se de um nome fictício para preservar a identidade do estudante.

Eu disse a ele que estava tudo bem se não quisesse fazer a atividade, que podia ficar olhando e, então, tive a ideia. Falei para a turma que precisaria da ajuda deles na aula, principalmente com os desenhos, porque não sabia desenhar direito. Comecei a atividade das "meias trocadas", como de costume com uma pequena historinha; perguntei a cada um o palpite de quantos pares de meias conseguiriam fazer para o personagem da história e, depois, desafiei-os a desenhar a quantidade de combinações de meias que eles falaram, sem repetir. Pedro logo quis participar, e o seu palpite foi o maior da turma, sendo que ele conseguiu fazer os 12 pares. Ao final da aula, quando todos já haviam saído da sala, ele voltou para me dar um abraço. Nas aulas seguintes, assim como as outras crianças, ele queria logo vir primeiro e já chamava a atenção dos outros colegas para participar da aula. Passado algum tempo, fui levá-lo à coordenação, pois estava febril, e a professora dele conversava no corredor com outro funcionário e me perguntou o que ele tinha aprontado. Respondi-lhe que não havia aprontado nada, apenas não estava bem de saúde. Gadotti nos mostra como o desinteresse não é uma questão de falta de inteligência: "Ele não aprende porque é 'burrinho'. Ao contrário, às vezes, a maior prova de inteligência encontra-se na recusa em aprender" (GADOTTI, 2002, p. 47).

Apresentamos o relato de um educador, identificado como *E1*, que teve a experiência com estudantes que também foram rotulados na escola:

> "Lidar com crianças indisciplinadas sempre é um desafio, já que, na maioria das vezes, são rotuladas como piores alunos e agem como tal. Com isso, tive oportunidade de trabalhar com um aluno que tinha o rótulo de indisciplinado. O aluno não gostava de participar das atividades nem de socializar com os demais colegas, apenas se dirigia aos outros alunos para bagunçar e tirar atenção. Diante disso, utilizei as estratégias do Círculo de escutar de verdade e de acolher aquele aluno, mesmo quando os outros colegas não o queriam incluir, sempre escutando as suas ideias, mesmo que algumas não tivessem a ver com o tema. Assim, no decorrer das aulas, pude perceber o avanço na participação e no comportamento [dele] com os demais colegas dentro de sala de aula". (E1)

Percebemos aqui um estudante rotulado, sem direito à voz: Pedro, assim como o estudante do relato do E1, precisava apenas de um pouco mais de atenção para ser ouvido de verdade – eles precisavam entender como aquele conteúdo podia estar nas brincadeiras e como a matemática é legal.

Abordagem do Círculo

O Círculo da Matemática do Brasil é uma abordagem pedagógica que visa a estimular o desenvolvimento das crianças, sua autoestima e seu gosto pela matemática. E, com esse objetivo, construímos amizades, amigos que serão para sempre, como nos dizem Bob e Ellen Kaplan, desenvolvedores do projeto *The Math Circle* nos EUA.

Detenhamo-nos neste parágrafo para falar sobre a abordagem do Círculo: em que consiste, como consegue realizar mudanças na sala de aula e no desenvolvimento desses estudantes, como nos exemplos acima? Uma frase muito importante que os educadores que participam da formação com os professores Kaplan escutaram no primeiro encontro foi: "Diga-me e eu esquecerei, pergunte-me e eu descobrirei" – é a desconstrução para a reconstrução, embora pareça estranho desconstruir para reconstruir. Porém, esse é o primeiro passo, pois, como educadores devemos quebrar o paradigma da sala de aula tradicional, diminuir o ritmo, instigar a curiosidade, perguntar, responder sem medo de errar, entender que o conhecimento advém de inúmeras tentativas que falharam e deixar que a improvisação faça parte da aula. Como nos diz Freire sobre a importância da curiosidade:

> A curiosidade como inquietação indagadora, como inclinação ao desvelamento de algo, como pergunta verbalizada ou não, como procura de esclarecimento, como sinal de atenção que sugere alerta, faz parte integrante do fenômeno vital. Não haveria criatividade sem curiosidade que nos move e que nos põe pacientemente impacientes diante do mundo que não fizemos, acrescentando a ele algo que fazemos (FREIRE, 2011, p. 33).

Recordo-me das palavras que Bob utilizou para exemplificar como são as aulas do Círculo, na primeira oficina, realizada em julho de 2013: "As aulas do Círculo da Matemática são como uma roda de conversa entre amigos, com um bom café". Uma roda de conversa, pois que ocorre naturalmente, é informal: conversamos sem medo sobre vários assuntos, deixamos a timidez de lado, todos são ouvidos, e o café torna ainda mais prazerosa a conversa e com vontade de querer mais, muito mais. Assim acontece com os estudantes que participam das aulas do Círculo: eles ficam ansiosos para mais um encontro e, quando nos encontramos com eles nos corredores da escola, eles perguntam quando será a aula. Isso ocorre porque os estudantes se sentem como construtores do conhecimento, eles são ouvidos de verdade e seus conhecimentos são respeitados. O respeito aos saberes do estudante nos faz lembrar de Paulo Freire, sobre que a escola deveria aproveitar esses saberes e aplicá-los nos conteúdos vivenciados

na sala de aula. Tomando uma citação de um diálogo entre Freire e Shor, ela nos faz entender como ocorre o processo de reconstrução:

> [...] a autoridade do professor deve estar sempre lá, mas ela muda quando os estudantes mudam e o estudo evolui, quando eles emergem como sujeitos críticos do ato de conhecimento. Se o processo funciona, o professor também se recria (FREIRE; SHOR, 1986, p. 117).

A cada aula do Círculo, o estudante adquire confiança, desconstruindo e reconstruindo, junto com os outros colegas de classe e também com os educadores.

Trabalhar nos erros das crianças, sem dizer a elas a resposta correta – para isso, é necessário paciência, não ter pressa, aguardar o momento certo de perguntar, esperar o tempo da criança.

Agora, a pergunta que surge, é: por que a matemática? Por que ela é tão importante? Acontece que, em nossas escolas, a matemática é encarada por nossas crianças como um bicho-papão, e isso é uma cultura que vem crescendo e se perpetuando ao longo do tempo. Tanto é que, se conhecemos alguém que diz gostar de matemática, as pessoas ficam assustadas e classificam essa pessoa como um grande intelectual. Porém, estamos enganados ao pensar que a matemática é uma capacidade para poucos, ou que aqueles que gostam dessa disciplina são extraterrestres. O Círculo busca mudar esse pensamento, procura demonstrar que a matemática está relacionada ao nosso dia a dia, que a matemática é legal, e não aquele bicho de sete cabeças que é apresentado na escola. Podemos ver em Machado qual é a importância da matemática:

> Muito mais que a aprendizagem de técnicas para operar com símbolos, a matemática relaciona-se de modo visceral com o desenvolvimento da capacidade de interpretar, analisar, sintetizar, significar, conceber, transcender o imediatamente sensível, extrapolar, projetar (MACHADO, 2001, p. 96).

Percebemos o quanto a matemática é uma parte fundamental do ser humano, na representação desde a sua realidade mais simples, como o troco do mercado, um desconto na loja, nas medições de uma obra, em gráficos no jornal, nas estatísticas – enfim, entre tantas representações que temos em nossa vida.

Contudo, associar a matemática à vida está justamente na linguagem, na língua materna, essencial para o desenvolvimento humano, e ocorre porque se encontra no

dia a dia e é uma condição necessária para a comunicação. Tomando como base a leitura de Machado:

> A matemática e a língua materna, diferentemente dos variados ramos do conhecimento em que as utilizam, constituem condição de possibilidade do conhecimento em qualquer ramo, sendo responsáveis inclusive pela produção dos próprios instrumentos que irão utilizar; nessa condição é que deveriam ser ensinadas (MACHADO, 2001).

Assim, Machado nos apresenta a matemática com uma importância semelhante à da língua materna: ambas têm uma impregnação e, assim como a língua tem um ambiente no qual se desenvolve, o mesmo deve ocorrer com a matemática no ensino.

Conclusão

Neste artigo, foi possível concluirmos que o docente é de suma importância para a vida dos estudantes. Percebemos também que nem sempre estaremos em um local propício a uma boa transmissão de conhecimentos. Com isso, será rotineiro encontrarmos espaços educacionais inadequados, que fazem com que os estudantes não se sintam à vontade para estudar, o que produz atos de indisciplina. Assim, os professores devem buscar elementos para prender a atenção dos estudantes, tendo em vista a promoção do aprendizado adequado a todos. Diante disso, faz-se necessário o olhar e a sensibilidade do educador, para que os estudantes se sintam acolhidos e confiantes para participar das aulas, da maneira correta e sem fazer bagunça.

O docente precisa dar liberdade para seus estudantes expressarem seus pensamentos e suas ideias, mas não pode ser permissivo com atos de indisciplina, nem desrespeito com qualquer colega de turma ou com os profissionais da educação. Assim, o docente deve deixar claros os limites e acompanhar de perto, escutando o estudante de verdade, para que ocorra uma construção efetiva do conhecimento e a formação de um pensamento crítico, capaz de resolver problemas e debater sobre os assuntos propostos, sem desrespeitar nem constranger os estudantes; com isso, ele irá transformar o aspecto da bagunça em participação nas aulas.

Como educadores, devemos incentivar a participação dos estudantes, bem como fazer com que eles se sintam bem dentro da sala de aula, uma vez que, se não se sentirem confortáveis ou estimulados pela aula, eles certamente buscarão um elemento de fuga, que certamente será a bagunça ou os atos de indisciplinas. Portanto, é essencial que o

professor entre no mundo dos estudantes e utilize exemplos do dia a dia e da cultura em que eles estão inseridos, jamais fornecendo as respostas de forma simples e sem buscar a explicação dos estudantes, mas uma reflexão.

O Círculo da Matemática visa a estimular as crianças a perderem o medo de errar. Para tanto, o professor precisa ser amigo e companheiro dos estudantes, compreensivo para com os erros e os pensamentos que surgirão no decorrer da aula, sempre mantendo a ordem para que a bagunça não reine no ambiente escolar. O professor deve tomar nota desse pensamento para construir o conhecimento por meio do conhecimento, ganhando a confiança de seus estudantes e demonstrando que a bagunça não é necessária nem faz bem, dentro e fora, do ambiente escolar, desconstruindo assim uma cultura de bagunça e construindo uma cultura de participação.

Dessa forma, torna-se claro que somente quando os profissionais da educação se empenharem no desafio da mudança de metodologia para trazer todos os estudantes para si, fazendo com que seus raciocínios matemáticos sejam considerados fundamentais para suas vidas e concedendo a devida atenção a seus pensamentos, teremos êxito na aprendizagem da matemática, bem como na participação e na inclusão dos estudantes.

Bibliografia

ERGUITA, Mariano Fernández. *A face oculta da escola*: educação e trabalho no capitalismo. Trad. Tomaz Tadeu da Silva. Porto Alegre: Artes Médicas, 1989.

FOUCAULT, Michel. *Vigiar e punir*: nascimento da prisão. Trad. Raquel Ramalhete. 41.ed. Petrópolis, RJ: Vozes, 2013.

FREIRE, Paulo. *Pedagogia da autonomia*: saberes necessários à prática educativa. São Paulo: Paz e terra, 2011. 143 p.

FREIRE, Paulo; SHOR, Ira. *Medo e ousadia*: o cotidiano do professor. Trad. Adriana Lopez. Rio de Janeiro: Paz e terra, 1986.

GADOTTI, Moacir. *Boniteza de um sonho*: ensinar-e-aprender com sentido. São Paulo: Cortez, 2002.

MACHADO, Nílson José. *Matemática e língua materna*: análise de uma impregnação mútua. São Paulo: Cortez, 2001.

MOSÉ, Viviane. Rubem Alves: a educação como um ato de amor à vida. In: MOSÉ, Viviane. *A escola e os desafios contemporâneos*. Rio de Janeiro: Civilização Brasileira, 2014. p. 89-122.

Parte 5

Relatos de educadores(as) do Círculo da Matemática do Brasil

O que significa ser educadora no Círculo da Matemática

Daniela Motta

Como educadora do Círculo desde o ano de 2013 até apresente data, tenho desenvolvido as atividades com 18 turmas de 2º ano dos anos iniciais do ensino fundamental de uma instituição pública do Distrito Federal, na cidade do Riacho Fundo II. A faixa etária das crianças que participam do programa é entre 7 e 9 anos. No Círculo da Matemática, a abordagem didática é construída a partir das ideias de cada estudante a respeito do conteúdo proposto. Em todas as aulas, começamos o encontro a partir de uma roda de conversa. Nela, cada estudante contribui com a sua percepção a respeito dos assuntos relativos à matemática. A roda de conversas é uma estratégia extremamente importante que foi incluída na proposta, pois, por meio dela, podemos criar vínculos com as crianças. Temos observado que ela tem se caracterizado como um espaço de acolhimento, em que as crianças podem se sentir seguras para falar o que sentem e o que pensam. Assim, a postura do educador tem sido a de um sujeito que questiona, mas que escuta atentamente o que as crianças querem dizer.

Cabe dizer que, nos materiais didáticos do Círculo, não consta a nomenclatura *roda de conversas*. No entanto, a abordagem pedagógica do programa enfatiza a necessidade do "perguntar incessante" e do "ouvir de verdade". Ambas as ações nos levaram a organizar a sala de aula dessa maneira. A segunda etapa da aula constitui-se das atividades mais específicas do Círculo, que se baseiam em diferentes situações-problema, geralmente em cada aula. As situações são construídas por meio de questionamentos que estimulam as crianças a descobrir os caminhos para as soluções. Nesse processo, temos estudantes que não conseguem explicitar seus pensamentos. Alguns, não expressam com clareza seus raciocínios, e outros não conseguem nem realizar o registro. Nesses casos, o papel do educador tem sido o de mediar a comunicação entre os estudantes, de modo que eles se auxiliem a construir o conhecimento matemático.

No que diz respeito à construção do conhecimento, vale ressaltar que, se vamos trabalhar um tema sobre números naturais com crianças que nem conhecem os números de 1 a 10, o primeiro momento é para ouvir o que as crianças têm a dizer sobre esse assunto. Começamos por perguntar sobre os números, se existem números entre os números,

e elas trazem suas ideias, exemplos e falas que, em em contexto diferente, podem ser consideradas absurdas, do tipo "um quadrado redondo". Questionamos suas respostas para que elas possam argumentar e apresentar suas próprias ideias. Essas ideias são desenvolvidas a partir dos questionamentos e das contribuições dos colegas. Estamos em um círculo de matemática. Todas as ideias têm o mesmo valor. Não se elogia um estudante em particular, mas acolhe-se todas as contribuições. Esse é um princípio fundamental. Quando o conhecimento é posto em questão, os próprios estudantes vão construindo o conhecimento do conteúdo proposto, de forma natural. A partir daí, vamos apresentando os conceitos formais. A gente vai só conversando. Todos têm oportunidade de se expressar.

Em nossa cultura, ainda predomina a ideia de que a matemática é para gênios, de que é acessível apenas a pessoas muito inteligentes. A maior parte dos professores de educação infantil tem dificuldade em dar aulas por causa da forma como eles próprios aprenderam, ou seja, antes de se internalizar um conceito, era necessário memorizar fórmulas que, na maioria das vezes, não faziam sentido para o estudante. Como esse professor vai ensinar matemática para um grupo de estudantes, quando ele próprio não desenvolveu um conhecimento básico? Como exigir o desenvolvimento de um pensamento avançado sem que essa base tenha sido bem construída? E isso é o que acontece na escola. Os níveis de compreensão matemática acabam se tornando fatores de segregação entre os mais inteligentes e os não inteligentes e, até mesmo, incapazes de compreender essa matéria tão difícil para eles. Contribui para isso o número excessivo de estudantes em sala de aula.

No Círculo da Matemática, trabalhamos com dez crianças, no máximo. Dessa forma, o conteúdo aplicado leva em consideração a individualidade de cada estudante. Faz parte da abordagem pedagógica o "ouvir de verdade". Tenho de saber quem é o meu estudante, quem é essa criança para quem estou dando aula, o que a deixa empolgada, o que esse estudante pensa. Até onde ele vai eu não sei, mas para conhecê-lo, preciso abrir espaço para ele falar. Em escolas tradicionais, os estudantes não são escutados em sala. A atitude comum é pedir para ele não falar, porque, se fala, ele pode atrapalhar a aula. Mas, se eu não escuto o meu estudante, como posso ensinar algo e aprender com ele? O que eu percebo nas atividades do Círculo é que eles trazem sugestões e me surpreendem. Além do mais, ao escutá-los, percebo coisas que podem estar atrapalhando o desenvolvimento deles.

Uma vez, eu estava em sala de aula, e um dos estudantes estava fazendo muita bagunça. Incomodava muito os colegas. Deixei um desafio para os estudantes resolverem e fui

conversar com ele. Comecei a perguntar sobre ele, sobre o que ele havia feito no fim de semana. Foi dessa forma que descobri que ele não tinha comido há mais de 24 horas, que havia trabalhado no cemitério vendendo flores no Dia de Finados. Como uma criança pode aprender algo nessas condições? Fui à cantina da escola, pedi um lanche para ele, e disse para ele descansar um pouco e voltar para a sala. É claro que ele voltou para a sala interessado em aprender, participou das atividades propostas e mudou o jeito de agir. Enfim, aquele estudante que parecia não querer aprender nada, não era por que o assunto era complexo, ou por ele ser incorrigível. Ele precisava ser ouvido, percebido, acolhido. Mais do que aprender matemática, ele precisa aprender que é importante para alguém. Precisa ser reconhecido. Precisa se sentir amado. Isso muda a percepção dele sobre si mesmo e sobre o mundo.

O Círculo da Matemática trata de crianças de escolas públicas que vivem em risco social. Aos 7 e 8 anos de idade, percebem-se os efeitos da desestruturação familiar em sua forma mais cruel, do tráfico de drogas e suas consequências, do contato com todo tipo de violência, da perda do direito de ser criança. Muitas delas não sabem ler ou escrever, e apresentam dificuldades cognitivas ou que são percebidas dessa forma. Como essa criança pode aprender matemática? Esses problemas vão aparecer também como indisciplina, indiferença pelo aprendizado e outros tão conhecidos problemas escolares. Isso gera um círculo vicioso: ela não aprende porque tem muitos problemas e tem muitos problemas porque não aprende. E esse círculo vicioso se autoperpetua e se amplia porque, se formos estudar os familiares dessa criança, veremos que a história até certo ponto está se repetindo. Provavelmente, eles também tiveram sérios problemas na escola. Eu acredito que o Círculo da Matemática é um meio eficaz de quebrar esse círculo vicioso. Percebi isso em várias situações, que me fornecem evidências de que, se esse estudante se percebe como um ser capaz de aprender a coisa mais difícil que é a matemática, ele pode ser capaz de coisas maiores, de se interessar pelo conhecimento.

No primeiro semestre do Círculo, havia um estudante que não queria fazer parte dele. O Rômulo achava a aula chata. Ele não queria participar de nenhuma atividade. Não queria falar. Eu o chamava, mas não adiantava. Uma vez, fui dar a aula de pontos explosivos, que é uma atividade com a qual trabalhamos de forma divertida o conteúdo de operações básicas. Nesse caso, era a operação de adição, eu trabalhava o conceito de *agrupamento*, quando se somam os pontos, que representam os números da operação, e esses pontos completam grupos de dez, explodem e mudam de coluna. Todas as crianças adoram. Então, deixei a turma trabalhando sozinha, e todos explicaram a matemática, o que as deixa mais empolgadas ainda, e fui realizar a atividade separadamente com o Rômulo. Ele me disse que não conseguiria, que

era burro. Nesse momento, parei para conversar com ele sobre o que ele achava de si, que ele deveria se enxergar de maneira diferente. Após a conversa, começamos a fazer os pontos explosivos e, aos poucos, ele foi fazendo e viu como era fácil. Quando percebeu que aquilo eram operações matemáticas, que ele era capaz de fazer contas, ele se iluminou, se surpreendeu com a sua capacidade. Ele tinha vergonha de não saber e, por isso, dizia que não queria fazer – o querer está extremamente ligado ao saber. Quando ele percebeu que sabia, que era capaz de fazer, ele me disse: "Tia, até que eu sou inteligente". Ou seja, no momento em que ele percebeu que era capaz, perdeu o medo. De um menino que tinha aversão à matemática, ele passou a participar e a querer ajudar os colegas, o que é fantástico, porque a gente percebe a mudança dessa criança, e isso vai fazer diferença na vida dela no futuro.

Percebi também que algumas crianças, quando não compreendem a matéria, brigam. Atacam os colegas pela vergonha de não conseguirem aprender. Mas elas querem aprender. Não acredito que exista alguém que não queira aprender. Quando alguém não quer estudar, é porque alimenta um autoconceito negativo, pensa que não é capaz e se fecha para o aprendizado. Disseram-lhe que ele é burro. Com a matemática, isso é muito específico, pontual. E se ela recebe um reforço negativo em sala de aula, se não consegue compreender os conceitos, se tira notas baixas e é até mesmo reprovada porque não alcança as metas estabelecidas pela escola, naturalmente tudo o que lhe foi dito vai se confirmar. Para ela, errar é vergonhoso. Logo, ela não se arriscará. No Círculo, há abertura para a criança errar. Não há ideias absurdas. O erro passa a ser uma ferramenta de aprendizagem. "O erro é bom", diz a abordagem pedagógica do Círculo. É um risco, é um caminho para a descoberta. É assim que a beleza da matemática aparece. A beleza da matemática aparece no Círculo. São os próprios estudantes que percebem isso, na alegria de se descobrirem capazes. Não há nada mais bonito do que a criança entender que ela aprendeu e que essa aprendizagem é construída junto com os colegas e com o educador, que para ela também é outro colega. Os olhos delas brilham, e elas gritam mesmo: "Tia, eu entendi isso, é muito legal!". É muito bonito, é emocionante. E eu sou grata por poder viver isso. Para a criança, é novo modo de olhar para si mesma e, para mim, educadora, é um novo olhar para o meu lugar no mundo. E eu me sinto igual a essa criança.

Outra situação, que me traz evidências de que o Círculo da Matemática é um modo de quebrar o círculo vicioso do autoconceito negativo por meio da descoberta da capacidade de aprender matemática, ocorreu com uma menina de 8 anos que vou chamar de Daniela. É aceito como fato comum em sala de aula que sempre há aquele estudante com problemas disciplinares e que não quer, ou não é capaz de aprender. E

o educador percebe que essa criança que dá mais trabalho normalmente não sabe ler, escrever e não aprende sobre números. Ela foi rotulada assim: não consegue aprender. A Daniela não sabia somar, achava não sabia nada – essa era a informação que eu tinha sobre ela. Estávamos discutindo sobre como se constrói o número e porque temos um símbolo para cada coisa. Distribuí uma tampinha para cada estudante e, a cada volta do círculo, entregava mais uma tampinha para cada um. Perguntava: "Com quantas tampinhas vocês vão ficar se eu der mais uma?" Elas entenderam. A Daniela então me perguntou: "Tia, eu posso sempre colocar uma tampinha?" Perguntei o que ela achava, ela foi raciocinando e me disse: "Você vai me dar mais uma tampinha, mais uma tampinha e eu vou ficar com infinitas tampinhas". Ela percebeu que esse somatório tendia ao infinito. Quem pensa que uma criança que não sabe nada, que tem dificuldade de aprendizagem e é considerada indisciplinada, não imagina que ela pode ter essa noção de infinito. Eu falei: "Fantástico!" E ela percebeu que era esperta e como era legal falar, participar das atividades, e começou a agir de modo diferente na sala de aula. Desde então, ela passou a dar opiniões, a expor o que pensava e a acreditar que sabia.

A abordagem pedagógica do Círculo se baseia nos seguintes princípios: *perguntar incessante, ouvir de verdade, organização do quadro, o erro, estratégias inclusivas, o fim, os nãos e as sutilezas*. A gente nunca dá a resposta. Começamos por questionar o que estamos fazendo em sala. As crianças se perguntam e percebem se isso faz sentido ou não. Nessa abordagem, é preciso ouvir a opinião delas; o professor não está em um patamar acima. A organização da sala permite que o professor se porte e passe a ser como um estudante do Círculo, e a criança também é uma educadora. Ela explica o conteúdo aprendido de acordo com o próprio raciocínio. Por isso, é preciso ouvir como é que ela pensa, entender a estrutura do pensamento dela e como, passo a passo, ela construiu aquela ideia, como ela organiza o pensamento. Essa atitude é de valorização desse indivíduo.

Quando um estudante me faz uma pergunta e eu não sei a resposta, eu respondo que não sei. Em uma situação dessas, um dos estudantes ficou surpreso por eu mostrar a ele que não sabia tudo e que, como ele, eu também estou aprendendo muitas coisas. O estudante percebe o quanto o que ele pensa é importante. Só percebemos isso ao escutar o que ele tem a nos dizer. Há situações em que expor o raciocínio é complexo para ele. O educador então entra como o mediador, tentando ajudá-lo a expressar o que pensa. Mas as outras crianças também fazem isso e, muitas vezes, até de forma melhor. As vezes, acontece de uma delas não estar entendendo, e vem aquele estudante que explica do jeito dele. Crianças têm uma linguagem própria, um jeito de agir que

é delas, o seu imaginário. É muito legal quando uma criança explica para outra: o entendimento fica mais fácil entre elas. Nós, adultos, perdemos isso em algum lugar. E o resgate disso só se faz quando nos colocamos no mesmo nível da criança.

A *bailarina* é uma atividade em que trabalhamos a reta numérica, conteúdo que as crianças só verão bem mais tarde. Quando aplicamos as técnicas e os conteúdos, o que percebemos é que elas se utilizam dos elementos básicos do seu imaginário e recriam outros personagens a partir da bailarina, por exemplo. Uma vez que elas criaram outro personagem, o Círculo cria um espaço em que elas falem o que pensam. Quem define como a bailarina deve ser são as crianças. As aulas nunca são uma igual à outra, embora o conteúdo seja o mesmo. A aplicação do conteúdo vai variar de pessoa para pessoa. Se você conhece o seu estudante, você verá que o imaginário difere de um para outro. Nisso, você vai vendo como as crianças têm coisas para mostrar, elementos para serem usados.

Quando trabalhamos desafios, elas querem entender o que está acontecendo e como podem resolver do seu modo. Temos um conteúdo, o *labirinto*. Cada estudante monta e cria caminhos diferente para buscar a solução para o enigma. Mesmo que seja o mesmo conteúdo, cada percepção será diferente. Percebi também que, ao dar o mesmo conteúdo para uma mesma criança, ela o verá de forma diferente. É muito interessante observar como é essa criança, agora, modificada pelo conhecimento. Repeti a aula da bailarina, e uma estudante, a Terezinha (nome fictício), teve uma percepção totalmente diferente. Eu voltei ao assunto, porque alguns estudantes não tinham captado a ideia. A atividade no Círculo não é fechada. Os conteúdos são de uma aplicabilidade e de uma complexidade tão grande, que são perfeitamente adaptáveis para que possam ser trabalhados de acordo com a capacidade dos estudantes. São ferramentas excelentes para trabalhar conceitos matemáticos. Assim, o mesmo conceito pode ser trabalhado com várias atividades.

Outra situação que me fez perceber o papel do Círculo da Matemática na construção de um autoconceito positivo me ocorreu quando visitamos uma escola particular com alto nível de aprendizagem. As crianças tinham a capacidade de resolver ideias matemáticas de forma muito fácil. Eram estudantes do 2º ano, de 7 e 8 anos de idade. Os estudantes daquela escola, na minha concepção, sabiam muito para a idade deles. Surpreendeu-me, ao assistir a uma aula, o quanto eles faziam contas complexas, de cabeça. Fui conversar com a coordenadora, afinal, os meus estudantes, na mesma idade, não sabem contar. Nessa escola, com 3 anos de idade, os estudantes já são estimulados a desenvolver o raciocino matemático, porque eles têm muitos recursos.

Pensei em nossos estudantes de escola pública, com 6 e 7 anos de idade. Praticamente, eles não têm recursos. Os resultados são discrepantes, obviamente. O que poderia haver em comum entre aquelas crianças, eu me perguntava – e tenho constatado –, é a disposição de aprender, a vontade de ir além, o interesse pelo mundo, o desejo de conhecer tudo e a alegria de descobrir que são capazes de aprender cada vez mais.

O trabalho no Círculo tem me feito questionar a ideia de que certas crianças ainda não podem aprender tal conteúdo. Para mim, todas as crianças adoram aprender. Desde que se ofereça a elas recursos, espaço para se expressarem, que se demonstre que elas têm responsabilidade e são capazes, elas acreditam que podem conquistar o mundo. Elas têm uma curiosidade inata. São apaixonadas por descobrir. Por conhecer. Por passar pelos desafios. A responsabilidade do educador é dar essa liberdade para a criança aprender, para ser ela mesma, dizer para ela que pode ser quem ela é. Que ela é única e, por isso, é assim do jeito que ela é.

Normalmente, em sala de aula, o estudante é podado, tem que ficar sentado e quieto. Nas aulas do Círculo, é comum a criança gritar: "Tia, eu entendi!". Ela pula e vai mostrar o que aprendeu. O conhecimento é dela. Mesmo que eu saiba sobre isso, o raciocino é dela. Somente ela é capaz de me mostrar o seu raciocínio. Se ela tem dificuldade em demonstrar isso com os elementos que possui, o educador será apenas o mediador, para que ela mesma perceba isso.

Ainda voltando à questão da indisciplina, as histórias são muito similares. Sempre tem uma criança que apronta, que começa o trabalho do Círculo sem saber nada, mas, aos poucos, vamos conhecendo a história, a vida dela, conversamos com os professores, com os orientadores, com os pais ou alguém da família. Um estudante não é um elemento isolado. Ele é também o modo como é visto pelos colegas, pelos pais, pelos professores, por si próprio. Quando nós passamos a entender o que está por trás dessa criança, o modo como trabalhamos os conteúdos inclui a sua história, o modo como ela é capaz de compreender o que lhe é oferecido. Ou seja, vamos além de dar uma aula de matemática. Somos responsáveis pelo desenvolvimento daquela criança. A forma como ela se vê na escola define, até certo ponto, como ela se verá no futuro. Nesse ponto, um educador do Círculo da Matemática é um idealista. Quem gosta de matemática geralmente teve um professor que mostrou a ele o quanto a matemática é bonita. Um professor de matemática que o ajudou. Mas, normalmente. existem verdadeiros traumas relacionados ao aprendizado da matemática. É preciso que haja pessoas que demonstrem isso, esse entusiasmo pelo ensino da matemática. É preciso que esse gostar seja multiplicador e que modifique todo mundo. Esse professor é o que

faz a diferença entre o estudante que odeia estudar e o que ama o conhecimento. Isso será realmente difícil enquanto os professores se julgarem incapazes. Um dos caminhos ideais é a formação de professores com a metodologia do Círculo da Matemática.

As oficinas do Círculo despertam o gosto por ensinar matemática. As atividades são desenvolvidas a partir da experiência do Círculo por meio da prática. Os responsáveis constroem o Círculo. São pessoas que gostam e se juntam. Enquanto assistimos às aulas, anotamos o que é interessante. A gente pega as falas e as vai absorvendo. O Círculo nunca valoriza o estudante, mas sim a capacidade da criança de aprender. Jamais elogiamos a criança dizendo "você é muito inteligente". Anotamos a abordagem pedagógica: qual é a sutileza para formalizar a conclusão, como é que funciona na prática. Pegamos o conteúdo geral e definimos como funciona uma aula. Qualquer pessoa que tenha interesse pode transpor para a sua sala de aula as ferramentas do Círculo como material de apoio.

Contudo, é importante perceber a desconstrução do modo de ensinar. É uma nova maneira de ser em sala de aula. O Círculo não vai existir se o professor expor as atividades. O Círculo só existe quando todos participam, quando todos estão construindo. Como é que alguém se torna um professor questionador? Como tomar um novo caminho a partir do que aquelas crianças falaram, do rumo que as crianças tomaram, e como se reinventar a partir da nova rota? Não podemos dizer "vamos por aqui" porque eu não sei ir por outro caminho. Se o professor não aprende com as crianças, não há Círculo da Matemática. Eu não posso ter medo de ensinar. Professores têm medo de não saber. Por isso, as rotas são fixas, e é difícil admitir que se vai por um caminho que não sabe aonde vai chegar. As crianças vão questionar situações em que não sabemos para onde vamos, e devemos assumir a responsabilidade pelo que não sabemos. A humildade é uma das virtudes do educador do Círculo da Matemática.

Quando se empodera a criança, perde-se o *controle*, o que pode ser realmente assustador. Deixar de ser um professor que tem um conhecimento guardado para si para dar à criança a chave do conhecimento implica que ela vai longe, que vai duvidar do que aprendeu, que vai questionar e perceber o que não faz sentido. Assim, começamos um outro caminho. É assim o aprendizado: estudando, aprendendo, descobrindo. Na formação de educadores, isso deve ser bem específico: algo que só apresenta conteúdo, assiste a aulas e aprende uns com os outros; o professor pode ter medo de alguém assistir a uma aula dele e ser questionado. No Círculo, avaliamos as aulas uns dos outros, e temos um *feedback*; além disso, nós nos apropriamos dos novos modos de dar aula e admitimos que temos muito a melhorar. Esse Círculo de formação

de professores produz mais ferramentas, elementos novos de outros professores e que enriquecem ainda mais a nossa forma de ensinar.

Por essa razão, questiono as formações regulares das escolas tradicionais, quando os professores aprendem a ser professores a partir da forma expositiva. Isso é nocivo para um professor de matemática. O aprendizado é troca de ideias, afinal, a vida é assim, vamos aprendendo juntos. A matemática se aprende junto porque faz parte da vida. Esse tem sido o meu maior aprendizado no Círculo da Matemática.

A importância de uma matemática real

Robson Lopes de Alcântara

> "A mente que se abre a uma nova ideia jamais voltará ao seu tamanho original". (Albert Einstein)

Quando eu estava na 4ª série, eu disse para minha mãe que "odiava matemática". Ela respondeu me levando a uma biblioteca local para me deixar ler os livros da parede. Depois de eu abrir e fechar os livros, ela explicou que a matemática era o que havia naqueles livros e que, para eu entender o conteúdo deles, precisaria aprender a linguagem matemática, da mesma forma que aprendia sobre a língua portuguesa; o assunto que eu odiava na escola era a aritmética. Mas eu era apenas uma criança; muitos dos nossos estudantes nos dizem que o que eles fazem na teoria dos números, aritmética e geometria nas aulas do Círculo, é divertido, nada como o que é ensinado em suas aulas de matemática. Francamente, para muitas das crianças que atendemos, o Círculo da Matemática é a única exposição que chega a ser o que eu – ou minha mãe – chamaria de *matemática real*. Em matemática, a abstração é o processo de extrair a essência subjacente de um conceito, removendo qualquer dependência de objetos do mundo real com os quais ele pode ter sido ligado originalmente, e generalizando-o, para que ele tenha aplicações mais amplas ou de correspondência entre outras descrições abstratas de fenômenos equivalentes.

Em um Círculo de Matemática, o foco não está em qualquer conteúdo em si, mas muito mais sobre o processo de fazer matemática e resolver problemas matemáticos. A expressão "fazer matemática" é utilizada quando os estudantes estão resolvendo problemas para os quais eles ainda não aprenderam um procedimento. A maioria das crianças gosta das aulas do Círculo, porque elas não gostam do que veem na escola e estão procurando por algo mais.

O Círculo da Matemática me fez perceber quão importante é à relação professor-estudante. Também me fez refletir sobre o quão desinteressante era a forma que eu conduzia as minhas aulas. Foi fundamental perceber que as aulas não são somente conteúdos – com isso, minha forma de agir e de me comportar em sala de aula mudou. A troca de experiências, talvez até um abraço acolhedor, faz toda diferença em uma relação interpessoal, mas, quando se trata de crianças, acho que isso se potencializa. As crianças são muito mais inteligentes

do que pensamos, só precisamos saber a melhor forma de guiá-las ao conhecimento. E esse é o intuito do Círculo da Matemática do Brasil: não dizer o que elas devem fazer, mas direcioná-las em busca da apropriação do conhecimento.

O lema do Círculo da Matemática é: "Diga-me e eu esquecerei, pergunte-me e eu descobrirei". E é isso o que tentamos fazer com as nossas crianças. Elas já são curiosas por natureza – gostam de aprender. Só que, muitas vezes, diminuímos essa curiosidade nelas, dizendo o que e como determinada coisa deve ser feita, e nos esquecemos do quanto é boa a sensação da descoberta e da construção. Dessa forma, trabalhamos a lógica e a abstração; no futuro, essas crianças terão de lidar com a abstração em muitas áreas do conhecimento e, por isso, é necessário trabalhar bem essa parte, visando a uma boa formação e preparando-as para os desafios futuros.

Enfim, o sonho continua. O sonho de transformar nossos estudantes por meio do nosso trabalho, criar neles a atração, o desejo, o envolvimento e o interesse pelo aprendizado. Que eles possam sentir mais e mais o prazer da descoberta e da apropriação do conhecimento.

Dividindo ideias

Samanta Stein da Silva

Dividir é algo natural na infância. As crianças aprendem a dividir seus brinquedos, seus lanches, seu espaço e, embora muitas vezes o façam com relutância ou de forma desigual, elas sabem o que significa *dividir*. No entanto, parece que, quando chega o momento de aprenderem a divisão na escola, esse processo não tem sentido algum para elas. E eu não tiro sua razão. Elas aprendem a "armar" uma conta e memorizam um mecanismo que, de forma mágica, apresenta um resultado correto para a divisão pedida. Diversas vezes, ao perguntar às crianças como elas faziam a divisão, a resposta que eu obtinha era justamente a explicação desse mecanismo, nada que indicasse que elas estavam entendendo o processo de divisão que estavam realizando.

Foi por meio das aulas do Círculo da Matemática que pude presenciar uma experiência "diferente do padrão" envolvendo a divisão, em uma das escolas municipais em que eu leciono. Em uma turma de 3º ano do ensino fundamental, comecei a trabalhar divisão por meio dos *pontos explosivos*. Trabalhar essa operação foi um pedido da professora titular da turma. Em uma conversa, ela expressou sua frustração por não conseguir que seus estudantes compreendessem a divisão. Ela me perguntou se eu tinha um método para ensiná-los de forma mais eficaz. Expliquei-lhe que, no Círculo, não tínhamos um método, mas princípios que poderiam ser utilizados de forma a contribuir para uma melhor aprendizagem. Sendo assim, nas aulas semanais do Círculo, por meio da valorização do erro e da descoberta, construí, juntamente com os estudantes, um processo de divisão usando os pontos explosivos que funcionasse e fizesse sentido para eles. Trabalhamos muito com a questão do valor posicional, e não demorou para que os estudantes compreendessem que, quando tínhamos uma centena, por exemplo, e quiséssemos dividi-la em dois, precisávamos transformar essa centena em dez dezenas, ou, na linguagem de pontos explosivos, precisávamos "explodir" essa centena e transformá-la em dez dezenas. Perceber essa necessidade fez todo o sentido para os estudantes. E, assim, construímos os pontos explosivos para a divisão, sendo que, na parte superior, representávamos o número que seria dividido e, na parte inferior, fazíamos colunas de acordo com a quantidade em que iríamos dividir o primeiro número. Os estudantes participaram ativamente dessa construção: eles tinham um problema – não saber como dividir –

e precisavam solucioná-lo. Fizemos tudo com muita brincadeira e com muitos erros, e o resultado foi surpreendente.

Ao final dessas aulas, compartilhamos com a professora da turma os pontos explosivos para a divisão. Esse formato passou a ser utilizado por ela nas atividades em sala de aula, e os estudantes se mostraram bastante empolgados em trabalhar com o método que eles mesmos tinham "descoberto". Valorizar as ideias dos estudantes não apenas permitiu que eles compreendessem de fato o mecanismo da divisão, mas lhes proporcionou alegria em trabalhar com algo que, por sua própria vivência, eles já sabiam o que significava.

E se estudantes e professores gostassem de aprender matemática?

Transforme e você também será transformado...

Flávia Levemfous

Atualmente, sou professora de matemática da rede pública municipal de Porto Alegre, que atende ao ensino fundamental da educação básica. Sinto-me honrada em participar do Círculo da Matemática e tenho desfrutado muitos prazeres na convivência com o grupo de educadores do Círculo, com os professores fundadores Bob e Ellen Kaplan, o professor Steve Kennedy e a coordenação, bem como com as crianças, na vivência da abordagem difundida nas oficinas de capacitação.

Participo dos encontros de formação desde o primeiro semestre de 2014, e me surpreendi com os princípios que norteiam a abordagem do Círculo da Matemática, não tanto pela novidade, mas pela reunião e sua aplicação no ensino da matemática, constituindo uma abordagem humanista. Identifiquei vários pensadores refletidos nas ações propostas pelo Círculo e uma coerência muito grande entre os princípios da abordagem para as crianças e o tratamento dispensado aos educadores do grupo.

Aqui, todos são chamados pelo nome, há um profundo respeito e uma valorização que se observa nos mínimos detalhes: os locais onde são realizados os encontros são de bom nível, assim como as acomodações, o transporte e a alimentação que são oferecidas aos participantes. Existe abertura para perguntas, todo o crescimento dos educadores é valorizado, há menção às atividades das equipes de todas as regiões do país, de um encontro para o outro busca-se atender às questões levantadas pelos "estudantes-educadores", entre outros aspectos.

Como os professores são norte-americanos e já têm idade avançada, a comunicação entre educadores e fundadores é realizada em inglês, o que, para mim, foi e é um grande desafio. Mas, até nesse aspecto, o progresso é observado e estimulado naturalmente, sem pressão, como resultado de uma necessidade advinda do convívio com o grupo. Funciona mais ou menos como com as crianças, a quem por princípio devemos chamar pelo nome, assim como deixá-las expressar suas opiniões, mesmo

que erradas, pois o erro é tratado como natural, como parte do processo e fonte para se pensar em grupo, discutir e produzir novos conhecimentos. É claro que o trabalho ocorre em pequenos grupos, no máximo dez por turma, o que é uma condição para um tratamento mais próximo, com valorização da opinião individual e atenção ao processo mental comunicado oralmente por cada criança. Cada uma delas é convidada a participar, a mostrar o que pensa no quadro-negro, a representar da sua maneira, mas isso não é obrigatório.

É muito gratificante observar como as crianças reagem aos princípios: há aquelas que participam sem a necessidade de muita estimulação, e as que reagem positivamente a todas as propostas pedagógicas. Estas se sentem desafiadas desde o início, e seu crescimento é visível já nas primeiras aulas. Mas há aquelas que, mesmo não participando inicialmente, com o desenrolar da aula, acabam por se integrar e pedem para participar. Ao não se sentirem pressionadas, elas vêm naturalmente para o grupo e para as atividades, e colaboram do jeito que podem. Isto já aconteceu com crianças que não queriam fazer alguma atividade, ou que não queriam nem entrar na sala onde realizamos as nossas aulas, ou que ainda se recusavam a ir ao quadro. Ao mesmo tempo, é trabalhado com os mais ativos como é importante ouvir os demais, para entendê-los e para conhecer a sua forma de pensar.

Tenho muitos anos de experiência como professora em todos os níveis de ensino e considero minha formação bem abrangente e diversificada, pois fiz o curso de licenciatura plena em matemática e o de licenciatura em pedagogia, além de ter iniciado minha formação com o curso normal, precursor dos cursos de magistério. Fiz ainda cursos de psicopedagogia clínica e institucional, tendo atuado na área por mais de dez anos. Sempre gostei do trabalho na escola, lugar primeiro da educação formal.

No que concerne ao ensino da matemática, sempre busquei cursos e eventos que possibilitassem encontrar caminhos alternativos para a dura realidade que encontrava nas escolas, sem me conformar com a ideia de que "o estudante é assim mesmo" ou "a matemática é para poucos, não se preocupe" ou " não se esforce muito, porque eles não vão aprender mesmo, nem querem". No cotidiano, eu me sentia muito dividida entre cumprir os programas com quem podia acompanhar ou ficar "marcando passo" com a maioria da turma, quase sempre bem numerosa. As tentativas individuais de despertar o interesse em turmas de nível mais avançado esbarravam no preconceito já construído pelos estudantes, à medida que avançavam na escolaridade ("a matemática é difícil", "não sou bom de matemática", "isto é para os inteligentes"). Trabalhar com os menores, por outro lado, exigiria assumir também outras áreas do conhecimento, como professora unidocente.

Aí, tive contato com o Círculo da Matemática, por intermédio de uma colega que ouvira falar do projeto na Secretaria de Educação. E descobri pessoas que vinham com uma proposta com a qual eu me identificava ("a matemática é a música do universo", "diga-me e esquecerei; pergunte-me e eu descobrirei", entre outras ideias), além do ótimo tratamento dispensado ao educador, que é o principal agente, que tem de se sentir importante, valorizado. Afinal, é na relação entre educador e crianças que se constrói o conhecimento.

Desde então, tenho trabalhado com crianças de 3º e 4º anos da Escola Municipal Jean Piaget, aprendendo muito com elas. As respostas das crianças me surpreendem: muitas vezes já desmontaram meus preconceitos, do tipo "criança de 8 anos não sabe nada de número negativo, nem adianta falar que faltam muitos pré-requisitos para chegar lá!". Ou então, mudando condutas, o que tem me ajudado a ser mais feliz em sala de aula. Exemplos: estou mais relaxada, menos tensa com o desenrolar das aulas, menos fiel às sequências curriculares e mais atenta ao desenvolvimento mental e ao gosto das crianças pelas descobertas; sinto-me mais confiante no potencial das crianças, apesar de reconhecer muitos problemas, como a fixação das aprendizagens, a aplicação dos conhecimentos e a generalização como caminho para níveis mais elevados.

Vejo as crianças gostando de participar das aulas, tendo prazer em descobrir regras, achando a matemática divertida e fácil. E isso com pouquíssimos recursos necessários, basicamente o quadro-negro e giz. A convivência com o Círculo da Matemática me fez crescer pessoal e profissionalmente: adquiri coragem para organizar um projeto de numeramento na escola, o que sempre quis fazer e nunca havia arriscado – isso tem me estimulado a escrever e me animado a conviver e discutir com pessoas mais jovens, e também a trocar experiências, inclusive valorizando-as. Em suma, *transforme e você também será transformado*.

A proposta do Círculo da Matemática encanta. Não é fácil. Não vem pronta. Precisa ser adaptada ao nosso cotidiano. Precisa ser enriquecida à medida que descobrimos necessidades. Não é a solução para os problemas que a educação matemática enfrenta no país. Não se propõe a substituir currículos escolares, nem a fazer mágica para recuperar estudantes. Ao longo das formações, temos avançado na construção da metodologia e trabalhado para torná-la cada vez mais difundida. Com certeza, o Círculo da Matemática pode colaborar para o desenvolvimento das nossas crianças e, talvez, até para o resgate do encantamento dos professores. Esse é o nosso desafio: e se ajudarmos as crianças a gostarem de matemática? E por que não pensar: e se professores e estudantes gostassem de aprender matemática juntos?

A melhor formação é a vivência

Ítalo Lucas e Karolynne Barrozo

Quando iniciamos nosso trabalho como professores, passamos por muitos dilemas, sendo que a maioria deles não tem respostas. Sentimo-nos sozinhos diante de uma turma com 30, 40 ou 50 crianças ou adolescentes. Assim, vivenciamos diariamente a dificuldade de implementar mudanças ou soluções para problemas de sala de aula, em especial a aprendizagem de nossas crianças. Torna-se difícil romper com as dificuldades dos nossos estudantes em matemática, sem questionar "o que está acontecendo de errado?" ou "será que posso fazer diferente?"

Resistência – temos dificuldade de mudar. Principalmente quando percorremos um longo caminho, e os desafios que nos interpelam não podem ser resolvidos com a bagagem de conhecimentos que trazemos em nossa formação. Estamos sempre em formação. Como educadores do projeto O Círculo da Matemática, tivemos uma experiência interessante, sobre o que tratamos até aqui. Formação e vivência. Vivenciar novas propostas é muito importante para validarmos o que funciona ou não.

Realizamos uma formação de professores em uma cidade do Nordeste brasileiro. Era um auditório com aproximadamente 100 professores do ensino fundamental. Cada professor tinha muitas vivências e conhecimentos. Muitos, com 15 ou 20 anos de carreira, estavam diante de dois jovens de 20 e poucos anos. O que poderíamos oferecer àqueles professores? Tentamos estabelecer uma comunicação com base no diálogo, mas não conseguimos. Tudo parecia um monólogo vindo de dois jovens graduandos que mal compreendiam o que aqueles professores enfrentavam. Muito mais que humildade, precisávamos nos colocar no lugar deles, ter empatia.

Uma professora levou sua filha pequena para a formação, e a partir daqui a chamaremos de "garota-salvadora-da-formação". Enquanto demonstrávamos a proposta do projeto, a criança sorria para nós e participava daquela formação que, para uma criança, poderia ser entediante, mas não foi. Ela vivenciava ali o que o projeto acreditava. Nós percebemos a importância de trazê-la para nossa aula e demonstramos como seria vivenciar o Círculo da Matemática do Brasil. Bem-vindos à *Dinner Table*, como diriam os professores Kaplan ao fazer referência a uma modalidade de conversa como estivéssemos à mesa com amigos.

Perguntamos à "garota-salvadora-da-formação": "De qual sanduíche você mais gosta?" Ela respondeu com toda a seriedade, simplicidade e inocência possíveis. A partir da resposta dela, começamos a construir sua própria matemática. Ela prontamente nos respondeu os seus sabores preferidos. Tudo o que ela falava nós registrávamos no quadro. Depois disso, perguntamos: "Mas nós gostaríamos de dividir esse sanduíche com você e com outros três colegas seus. Como nós podemos dividi-lo para vocês? Em quantos pedaços esse sanduíche precisa ser divido para que os seus três amigos e você comam igualmente?"

A menina nos ajudou. Ela desenhou como ela gostaria de dividir o sanduíche. Dividiu-o em quatro pedaços. Perguntamos a ela se todos os pedaços eram iguais, pois cada criança deveria comer o mesmo tamanho. Ela concordou que alguns pedaços não estavam do mesmo tamanho e, assim, chegamos à divisão de um sanduíche em quatro pedaços iguais. Nós perguntamos a ela qual pedaço ela escolheria. Ela escolheu um dos pedaços. Assim, perguntamos: "Em quantos pedaços o sanduíche foi dividido?" Ela nos respondeu que foi dividido em quatro pedaços, mas que desses quatro, ela só comeria um pedaço. Depois, nós perguntamos para ela o seguinte: "Se você escolhesse mais um pedaço do sanduíche, quantos pedaços você comeria?" Ela prontamente percebeu que comeria dois dos quatro pedaços do sanduíche. Juntos, nós dois e a "garota-salvadora-da-formação" íamos desenhando o pedaço inicial e sua notação: o primeiro pedaço foi chamado de "1 pedaço de 4", o segundo, "2 pedaços de 4", e assim até o último pedaço.

"Mas e se você não quisesse comer muito e decidisse cortar o sanduíche em pedaços menores? Quantos pedaços teria o sanduíche?", perguntamos à "garota-salvadora-da-formação". Assim, encontramos um sanduíche com oito pedaços. Ela disse que comeria apenas um dos oito pedaços. Depois, nós perguntamos: "Se eu tivesse muita fome e quisesse a metade do sanduíche, quantos pedacinhos caberiam nessa metade agora?" Ela nos respondeu que quatro dos oito pedaços. E assim as frações de pedaços começaram a fazer sentido. Depois das comparações, nós desenhamos uma linha e colocamos o 0 (zero) em uma ponta e o 1 (um) em outra ponta. Pedimos a ajuda dela para organizarmos o nosso sanduíche na reta de números. Perguntamos à "garota-salvadora-da-formação" onde ficaria cada representação numérica dos pedaços, ela colocou os pedaços de forma errada e, nesse momento, o grupo que nos assistia começou com um burburinho dizendo que a menina estava errada, e nós, que aplicávamos a atividade, trocávamos olhares atônitos, pensando que não haveria saída, que somente cortar os pedaços com a criança não seria o suficiente para mostrar que valia a pena acreditar no projeto.

Pedimos que ela organizasse do número menor para o maior: não funcionou, a "garota-salvadora-da-formação" continuava errando a ordem dos números e, calmamente, elogiávamos o que tinha acabado de fazer, como se ela tivesse descoberto algo jamais visto na matemática. E realmente tinha. Como nunca tínhamos pensado que os números poderiam fazer sentido se fossem organizados daquela forma? *Que ideia maravilhosa, "garota-salvadora-da-formação"!*

"Garota, e se agora o 0 representasse os grãos do pão, quando ele ainda vai ser produzido, e o 1 o pão já pronto para você comer?", sugerimos. Prosseguimos: "Partindo do grão, o pão vai aumentando ou diminuindo?" "Aumentando!", ela respondeu. "Por quê?", retrucamos, como se aquilo fosse uma novidade e não soubéssemos o que acontecia. "Porque o pão vai aumentando até ficar pronto", respondeu a "garota-salvadora-da-formação", e nós tomamos essa resposta para sugerir a organização dos tamanhos dos pedaços do sanduíche.

Sem números, sem traços, sem formalizar a fração, perguntamos como ficaria a ordem dos pedaços se ela seguisse a lógica de que os grãos vão ficando "maiores" a cada etapa da produção do pão e pedimos que ela colocasse na "rede do pão", fixada pelo 0 e o 1 na lousa, os pedacinhos que tínhamos acabado de cortar. Ela colocou, certinho, na medida, do menor para o maior, só os pedacinhos, sem os números. A emoção entre nós dois, que dávamos a formação, foi tamanha que parecia final do Campeonato Cearense, com o nosso time favorito tendo acabado de ganhar a taça de campeão.

Por fim, ainda acreditávamos na capacidade da "garota-salvadora-da-formação" e pedimos que, do lado de cada pedaço, ela colocasse o número que representava o pedaço lá em cima, e ela o fez. Sorrimos e a parabenizamos pelo belo trabalho e, depois, contamos a ela que poucas pessoas conseguem identificar o processo do pão durante sua produção.

Nem de longe o que foi tratado representa tudo o que essa garota precisa saber sobre frações e todo o mundo de possibilidades que ela ainda pode conhecer, mas, naquele momento, demos um pontapé inicial para várias aulas que poderiam ser realizados para que aquele conteúdo fosse fixado e ela pudesse compreender o que pode ser feito. O assunto poderia ser retomado no encontro seguinte e, nas aulas posteriores, poderíamos abordar a soma e a subtração de frações com denominadores iguais e diferentes e, se ainda fosse possível, poderíamos discutir sobre o infinito com ela. Aqui, deixamos o protagonismo para a "garota-salvadora-da-formação" e o nosso muitíssimo obrigado!

Percebemos que vivenciar a abordagem foi muito mais importante do que apenas ouvir o que ela propõe. Todos os professores tiveram a oportunidade de ver o que uma menina de 7 anos de uma escola pública conseguiu realizar. Ela foi capaz de ter um pouco da noção do que representam as frações. Ela brincou, se divertiu e aprendeu. E nós aprendemos que nunca podemos subestimar a capacidade de nossos estudantes. Depois disso, nada mais precisou ser dito. Os professores ficaram surpresos com a participação da "garota-salvadora-da-formação". Eles vivenciaram cada princípio e perceberam que sempre é possível mudar, o que, depois, nos levou a um debate sobre a abordagem do Círculo.

Vivenciamos diariamente as dificuldades relacionadas ao ensino e à aprendizagem de nossos estudantes. Muitas vezes, buscamos culpados. Essas dificuldades, por vezes, querem tirar o nosso amor pelo que fazemos, de modo a nos deixar desanimados e impossibilitados diante de tantas demandas. Se vivenciamos dificuldades, precisamos vivenciar soluções. Por isso, a melhor forma de apresentar o projeto O Círculo da Matemática consiste em convidar cada professor, pai e mãe, e cada criança, para participar dessa grande conversa de aprendizado, vivências e muita diversão.

O Círculo e a disciplina

Gabriela B. Rodrigues

Com frequência, o problema disciplinar repercute nos conflitos da família e do meio social envolvente. Na escola, o clima das aulas deve ser de liberdade e tolerância, de modo a permitir que os estudantes tomem consciência dos seus valores e ajam em sintonia com eles. A autonomia conduz à autodisciplina, o que não significa, no entanto, que o professor deva ter uma atitude de indiferença ou apatia perante os estudantes. Pelo contrário, suas atitudes, embora democráticas, devem ser firmes. Hoje em dia nós nos deparamos com remédios para controlar a "curiosidade" das crianças, que é tratada como "síndromes" por psiquiatras. Há pouco tempo, o descobridor do distúrbio mais conhecido no meio clínico, o *transtorno do déficit de atenção com hiperatividade* (TDAH), afirmou ter sido esta uma farsa para vender remédios.

Assim, até que ponto a desobediência infantil deve ser tratada como distúrbio, e qual é o papel do educador nesse contexto complexo? E como o Círculo da Matemática, com sua abordagem livre e democrática, pode ajudar os estudantes com problemas disciplinares?

O início

Eu estava ansiosa para começar, tinha acabado de retornar da oficina de capacitação com os professores Bob e Ellen Kaplan, que acontecera em São Paulo, e animada para conhecer a escola indicada pelo Instituto TIM. Era um Centro Integrado de Educação Pública (CIEP) desolado, localizado em uma área carente e de difícil acesso no município de Duque de Caxias (RJ). Mesmo assim, não via a hora de começar, como todos os educadores do Círculo da Matemática ficam no final da capacitação – isso é visível em cada um deles, essa empolgação toma conta e inspira nossas atividades em sala de aula, e eu estava felicíssima pela oportunidade de atuar como educadora, nesse projeto em que acredito e admiro muitíssimo, por sua didática, metodologia e afetividade.

Iniciei as aulas do Círculo em junho de 2014 e fiquei surpresa com a quantidade de estudantes repetentes já com idade avançada nas minhas turmas de 3º e 4º anos do

ensino fundamental; além disso, soube que, nas escolas do município, essa é uma triste e comum realidade. Meu primeiro caso difícil: Marcos (nome fictício para proteger a identidade do estudante), 14 anos de idade, mais ou menos 1,80m de altura, filho de uma família "matrifocal", com sua mãe, que trabalhava distante, uma figura ausente da comunidade escolar.

Marcos estava entrando na adolescência. Hormônios o dominavam, e ele ficava a maior parte do tempo sem ver seus responsáveis e tinha como companheira uma irmã mais nova que estava sempre à sua procura e tomava conta dele; porém, ele passou a não respeitá-la mais e só fazia o que bem entendia. Marcos se recusava a fazer as aulas do Círculo, não gostava de matemática, tinha dificuldades com leitura e interpretação de texto, e tinha vergonha disso. Fugiu de mim nas primeiras semanas de aula e, quando percebi o que estava acontecendo, pedi ajuda ao seu professor. Visando a saber mais sobre o estudante, ele me contou todas essas coisas descritas acima e se mostrou muito preocupado com Marcos e me falou de outros da mesma idade e grau de repetência que se evadiram da escola e foram seduzidos e/ou aliciados pelo crime, chamando esse fenômeno triste e desolador, ironicamente, de "debandagem".

Esse professor, em minha humilde opinião, é um herói, pois assumiu essa turma que nenhum outro professor queria, por serem adolescentes rebeldes e indisciplinados e alguns com envolvimento em "bocas de fumo", tráfico de drogas na região. Então, esse professor me contou que Marcos estava passando muito tempo em más companhias e fora visto algumas vezes em uma "boca de fumo" próxima à escola.

Perguntei o porquê de o estudante não estar indo com o grupo assistir às aulas do Círculo e falei o quanto era importante que ele participasse das aulas, tanto para ele quanto para mim, e que minhas aulas são construídas com a participação de todos os estudantes; nesse momento, me lembrei das palavras de Ellen Kaplan: "A matemática precisa ser ensinada em uma atmosfera sem pressão. Deve ser um diálogo entre amigos, tentando juntos chegar à solução de um problema".

Parafraseei isso ao professor, que, de sorriso aberto, me disse que já tinha pedido para o estudante ir com o grupo, mas ele se negava, não tinha mais o que fazer. O que eu deveria fazer nesse momento? Eu me apaixonei pela autonomia do projeto, mas não poderia ser invasiva; pensei por alguns minutos e, então, perguntei se poderia adentrar a sua sala e conversar um pouco com Marcos, deixando claro o quanto eu não queria ser invasiva nem atrapalhar suas atividades. Ele permitiu gentilmente e me desafiou: "Acho difícil que consiga fazê-lo mudar de ideia, eu já tentei bastante" (risos). Um

pouco nervosa, pois ele já me olhava de canto de olho e desconfiado de sua cadeira, dei meu primeiro passo um pouco insegura: procurei não demonstrar, ergui a cabeça e pensei "eu consigo", não sabia muito bem o que fazer, mas iria tentar, precisava trazer aquele estudante para minha sala.

Nesse momento, lembrei-me dá docilidade de Bob e como Ellen cativa seus estudantes – eles me serviram como espelho inspirador naquele momento delicado; caso falhasse nessa investida, seria improvável que Marcos participasse das aulas, e outros estudantes que sempre andavam com ele iriam pelo mesmo caminho. Esse não era o meu objetivo, esse não era o objetivo do Círculo, pois queremos todos em nossas aulas sem nenhuma exceção, sem nenhuma exclusão. Então, puxei uma cadeira, sentei-me virada para Marcos, gentilmente me apresentei e falei do projeto, da metodologia e do objetivo das aulas; notei que ele estava bastante nervoso, e sua timidez era visível, pois fitava apenas suas mãos que estavam sobre a mesa. Ele as movia sistematicamente, mas estava surpreso com a minha abordagem, pois não o obriguei a assistir à aula, não exibi nenhum tipo de autoridade, fui calmamente tentando ganhá-lo, fazia perguntas engraçadas e ganhava um sorriso tímido, mas ele não me respondia nem me olhava, apenas continuava absorto em seus pensamentos. Então, coloquei minhas mãos sobre a mesa também e falei gentilmente para ele: "Marcos, você pode olhar para mim?" Ele então me olhou com um olhar doce, deu um sorriso tímido, mas logo desviou os olhos novamente, começou a conversar com o estudante ao seu lado. "Me ignorou", pensei, triste. Porém, ele estava confuso com toda aquela novidade, então continuei a falar: "Vamos fazer um acordo, se você não gostar dessa primeira aula, não precisará ir novamente. Não uma boa proposta? O que você acha?" Ele me fitou com um largo sorriso, percebi que ele gostou do desafio e me desafiava com o olhar, e falou: "Então, vamos". Quando estávamos saindo da sala, pude ver o professor empolgado, mas com uma expressão lívida, não acreditando no que tinha acabado de presenciar: o estudante rebelde, desobediente e agressivo, que não fazia as atividades dentro de sala e não respeitava os colegas nem o professor – aceitara sem imposição de autoridade, o que era comum para que ele fizesse algo –, indo assistir a uma aula de matemática, pois ele se negava insistentemente a assistir até mesmo às aulas regulares em sala.

No começo, ele se sentou desconfiado e olhando para o quadro. Comecei a aula e era a atividade *do sapo e das abóboras*. Ele apenas observava, manteve-se calado e reservado durante a aula inteira, não demonstrava nenhum sentimento de aceitação ou negação. Alguns estudantes entenderam a atividade e "pegaram" logo no começo o que era proposto, participavam, e eu comecei a interagir com alguns que se mantinham calados, mas não joguei o foco sobre Marcos, para que ele não se sentisse desconfortável logo

no início. Porém, olhava-o constantemente e aguardava uma resposta, sem pressão, pois eu não queria perdê-lo na primeira aula. A aula seguiu muito dinâmica e animada, todos os estudantes participavam e davam opções incessantes para o sapo se alimentar rapidamente – contei-lhes uma história, dizendo que o sapo estava faminto e precisava atravessar o campo minado para comer a abóbora, mas estava muito fraco de fome e precisava da ajuda deles para resolver a combinação correta dos números e atravessar o campo em segurança. Assim, sem que eu esperasse, um pouco antes do final da aula, Marcos se pronunciou, queria mostrar a sequência que o sapo seguia até encontrar a plantação de abóboras – meu coração quase explodiu de tanta alegria, mas procurei não demonstrar, porque um dos objetivos do Círculo consiste em não enfatizar o estudante, mas sim suas ideias, sua percepção e descoberta.

O meu blefe deu certo e, no fim da aula, perguntei se ele havia gostado: ele me falou que não era uma aula de matemática com formas e cálculos intermináveis, disse que era divertida. Entendi o que ele queria dizer: como as aulas do Círculo são construções, aprendemos e desenvolvemos juntos, e ele percebeu que, ali, poderia dar palpites e tentar, sem correr o risco de ser ridicularizado pelos pequenos – ele sentiu que conseguia pensar e resolveu tentar. Lembrei-me de uma frase que um dos pesquisadores do projeto disse durante a capacitação, e essa frase se adequou exatamente ao que eu estava pensando no momento, e a vi se repetir na percepção de Marcos. O pesquisador disse assim:

> "Parte do fracasso do ensino da matemática é o excesso de mecanização. Fazer matemática é fazer 'continha' e muitas vezes é um negócio chato para as crianças" (Flavio Comim).

Fiquei muito contente nesse dia, com o sentimento de dever cumprido.

Não precisei buscar Marcos na sala novamente, ele sempre vinha e participava ativamente em algumas aulas, enquanto em outras só observava, era tímido, não se oferecia para ir ao quadro, mas sempre que eu o convidava a expressar sua opinião sobre o assunto relatado, ele vinha, um pouco sem jeito, mas vinha. E era muito gratificante ver aquele "grandalhão" desajeitado no quadro, ao lado dos estudantes bem menores: observei seu crescimento nas aulas do Círculo, mas ouvia os amiguinhos falando de suas "aventuras" (bagunça) na sala e das brigas constantes; quando porventura ele faltava às minhas aulas, antes de qualquer coisa, me falava o motivo da falta, ao que eu dizia: "Tudo bem, mas não falte muito, ou não conseguiremos resolver os problemas dos personagens dos nossos jogos – vai que algum acaba não encontrando a solução. Suas opiniões também são importantes". E ele ficava surpreso, não estava acostumado com

essa abordagem afetiva, sem limitar, questionar ou cobrar com severidade nada dos estudantes. Devemos saber ouvi-los e ouvir verdadeiramente: nada é mais belo para um professor do que uma turma de estudantes ativos e participativos. Eu não gosto de quietude em sala, gosto quando eles comentam entre si, quando se questionam e me também questionam; gosto da algazarra quando descobrem como "resolver um problema" – esse é o verdadeiro pagamento do professor.

Esse estudante, Marcos, tido com indisciplinado e apático, se tornou um exemplo de disciplina e participação, com curiosidade e totalidade nas minhas aulas. Para concluir esse caso inspirador, não poderia deixar de citar o patrono da educação nacional, Paulo Freire. Ele dizia que, para que o professor tenha liberdade, autoridade e competência no decorrer de sua prática docente, deve acreditar que a disciplina verdadeira não está no silêncio dos silenciados, mas no alvoroço dos inquietos, o que implicaria a autoridade verdadeiramente democrática.

Uma breve descrição

Mantive uma estreita relação com o professor da turma: ele me contava sobre o desenvolvimento e sobre as desventuras dos estudantes. Porém, ele não acreditava que Marcos se comportava bem e era participativo nas aulas do Círculo, quase não faltava. O professor me falou dos outros adolescentes que abandonaram a escola – sentiam-se inferiorizados por serem mais velhos do que os estudantes da classe e, por serem repetentes, tinha baixa autoestima e muita irritabilidade dentro de si, tinham muitas dificuldades causadas pela falta de base educacional familiar e uma alfabetização inicial precária. O Marcos mesmo lia com dificuldades e, do alto dos seus 14 anos, era constantemente motivo de "zoação" dos colegas de classe que tinham entre 9 e 10 anos. Assim, a compreensão e a receptividade foram essenciais para esse estudante confiar em si e se desenvolver durante as atividades. Ele se mostrava competente e participativo e, sempre que o via no quadro, participando das atividades – tinha de olhar para cima, pois ele era bem mais alto que eu –, torcia para que ele não abandonasse a escola, e assim foi até o final do ano letivo.

O perigo

Havia também o Gabriel, estudante do 4º ano, muito interessado em aprender, estudioso e que gostava muito de matemática. Seu professor regente me disse que o estudante

era muito indisciplinado na sala de aula, e eu não pude acreditar, porque na minha sala ele era um anjo – como seu nome diz. Um belo dia, senti falta do Gabriel, que não faltava nunca, e os outros estudantes estavam falando alguma coisa sobre fogo. Eu pedi que não continuassem, que prestassem atenção nas atividades e que depois iríamos conversar sobre esse assunto. Depois, quando terminou a aula, fui levar os estudantes até a sala do professor, e ele me disse que, junto com o Marcos, Gabriel levou fósforos e uma garrafa contendo um pó branco para a sala e, quando falaram que o professor estava chegando, jogaram a garrafa dentro da lixeira de plástico e atearam fogo; o material inflamou com rapidez e por pouco não queimou a sala inteira. Conclusão: os estudantes estavam suspensos por três semanas da escola, e eu me perguntei por que esse exemplo de disciplina só funcionava na minha sala.

Disciplinados

Nessa mesma turma, 402, do 4º ano, havia dois outros estudantes que, acredito, são importantes para nossa proposta, Carlos Azevedo e Carlos Aguiar (nomes fictícios). Ambos com o mesmo nome e a mesma idade, 10 anos, eram do primeiro grupo, esperavam ansiosos pelas aulas, falavam constantemente que amavam matemática, eram muito participativos e, sem que eu pedisse para que tentassem fazer em casa, eles apareciam com atividades das aulas passadas, informando que haviam tentado e testado novas fórmulas para elas.

Trouxeram exemplares de máquinas de funções, pirâmides do faraó e números triangulares, entre outros – eles eram um exemplo de disciplina, amor pela matemática e afetividade dentro das aulas. Diziam que era a matéria de que mais gostavam e tinham muito respeito pelos colegas da turma e pelo professor dessa sala, Waldir (nome fictício), que falava bem deles e mencionava com orgulho suas notas "boas" e seu bom comportamento,

A estudante elétrica

Nessa mesma turma, tínhamos a Maria (nome fictício), superelétrica, agitada, acostumada com uma turma muito barulhenta e violenta, que sempre chegava à sala como se estivesse ligada na tomada de 220V. Apaixonada por matemática, era a primeira a se oferecer para realizar todas as atividades no quadro, mas não conseguia

ficar sentada durante um minuto e não parava de falar durante a aula, dando a resposta correta para os outros estudantes.

O que poderia ser feito para equilibrar essas aulas sem ser taxativa ou limitadora com essa estudante? Ela apenas tinha um raciocínio lógico ativo e gostava muito de matemática, e a metodologia do Círculo não é a de limitar os estudantes; pelo contrário, o objetivo é incentivar o questionamento interno. Após o término da aula, convidei Maria para uma conversa sobre as atividades realizadas, perguntei o que tinha achado, e ela disse que era tudo muito fácil, demorava muito para ter aulas de matemática comigo e que eu deveria dar aulas diariamente. Vi que a conversa estava fluindo e comecei a falar sobre o objetivo das aulas do Círculo; ela ouvia atentamente, questionava e dava soluções para as propostas das aulas passadas.

Então, resolvi entrar no assunto principal da conversa, estávamos trocando ideias como velhas amigas e falei da importância dos estudantes mais lentos pensarem sobre as respostas, falei que eles estavam buscando soluções dentro de seus cérebros e que isso ativava o raciocínio... Tive conversas com ela em outras ocasiões, explicando que, como ela se antecipava dando a resposta, os colegas não tinham tempo para pensar e se sentiam frustrados por não pensar tão rápido como ela. Falei ainda que, mesmo sem querer, ela poderia estar impedindo pensamento dos colegas, tendo já a resposta pronta; segui-a em todas as suas respostas, sempre perguntando o que ela achava sobre isso. No começo, foi difícil para ela esperar um pouco e, então, eu ia perguntá-la.

Mas ela era, sem dúvida, a melhor estudante de matemática que eu já tive, e isso me deixava feliz e preocupada com os estudantes que tinham o raciocínio normal para sua idade e também com alguns que tinham um raciocínio bem lento, porque, nas escolas brasileiras, nossos estudantes não são ensinados a pensar nem a desenvolver o raciocínio lógico. Da metade das aulas para o final do ciclo do Círculo, ela começou a entender o que eu lhe pedia, dava um tempo para os colegas tentarem responder – um tempo bem curto, por sinal –, então erguia a mão e me perguntava se podia responder.

Jogo de poder no 3º ano

Guilherme (nome fictício) vinha de uma turma da qual duas professoras desistiram: a professora regente de sua turma estava de licença, a substituta também pediu licença médica, a terceira era uma professora de teatro que resolveu assumir a turma, mas que foi remanejada para a biblioteca quando a nova professora assumiu. Essa professora

não levou dois meses e licença pediu também. Ou seja, foram quatro professoras em um ano.

Esse estudante era o que mais recebia reclamações das professoras, era superagressivo, não fazia nenhuma atividade, praticava *bullying* com os estudantes menores, foi encaminhado à coordenação várias vezes. Eu procurei conversar com as coordenadoras e com a professora de teatro que tinha permanecido um tempo com ele para saber mais sobre esse estudante tão temido pelas professoras. Fui informada de que ele estava tendo problemas com os pais, que estava sendo criado pela avó e que não adiantava falar ou conversar com ele, pois sempre negava a culpa dos atos que cometia: mesmo sendo às nossas vistas, dizia que não tinha sido ele, que não iria fazer novamente, mas sempre caía nos mesmos erros.

Guilherme já vinha pelo corredor gritando e espancando os outros colegas da turma, já chegava na sala "tocando o terror" e mexendo em todos os objetos que havia na sala – que era uma sala de vídeo –, não obedecia, era necessário pedir muitas vezes. Eu interrompia a aula a todo momento e via minha paciência se esgotando, sentindo pena dos outros estudantes que queriam entender e aprender e eram privados pelo Guilherme. Algumas vezes, tive de encaminhá-lo para a coordenação, mas as coordenadoras também não gostavam de tê-lo por lá. Em uma das atividades, a do *sanduíche*, ele falou vários palavrões absurdos, fez movimentos obscenos e, então, tive de terminar a minha aula mais cedo e, com o sentimento de frustração, pedir aos estudantes que voltassem para a sala. Essa foi a primeira em vez que, não importava a atividade colocada no quadro, eu não conseguia alcançar e nem acalmar o Guilherme e, já que a professora também não o queria em sua sala, e também não podia mandá-lo para a coordenadoria, resolvi ter uma conversa franca com ele. Com toda a paciência do mundo, expliquei-lhe o que ele estava fazendo, que era algo que não poderia acontecer dentro de uma sala de aula, tentei conversar sobre educação e o respeito que se deve ter para com os outros meninos e meninas da turma. Fiquei à sua disposição para ajudá-lo caso fosse necessário e pedi, com toda a clareza possível, para que ele se comportasse nas aulas, para que me deixasse dar aula para seus colegas. Cheguei ao ponto de perguntá-lo por que ele vinha para a escola e não sabia que aé estava tocando em sua ferida.

Ele, então com lágrimas nos olhos, começou a me contar sobre sua vida particular – que não vou mencionar aqui por ser íntima demais – e que estava morando com sua avó, que dizia não gostar dele. Percebi que tudo o que o estudante fazia era para chamar atenção e que ele gritava inconscientemente por amor e carinho. Compadeci-me dele e sempre tinha bastante paciência com ele, procurei ter bastante diálogo e, nas aulas

em que ele estava "atacado", eu o colocava como ajudante, fazia de tudo para ocupá-lo de alguma maneira, e ele se sentia importante na aula, pois, fazendo assim, ele não atrapalhava nem agredia, mas isso me causou outro problema do mesmo tamanho ou ainda maior.

Nessa mesma turma, havia outro estudante tão terrível quanto o Guilherme, o Allan. Estudante repetente, 11 anos de idade, forte e alto, que disputava com o Guilherme o controle da turma e era o único que conseguia colocar medo neste dentro da sala, Allan, nas minhas primeiras aulas, se comportou bem, mas ao ver que Guilherme estava conseguindo o que queria – ou seja, chamar atenção – e ser mais participativo, resolveu também competir pela atenção.

O que fazer com dois pré-adolescentes agressivos, com problemas familiares e o fantasma sedutor das drogas que vivia a assombrar a escola? Como a metodologia humanística do Círculo poderia me ajudar nessa causa? Pelo menos no caso do Guilherme, ele se mostrava uma criança magoada, carente, mas com uma boa conversa e uma boa dose de carinho o problema foi resolvido. Já o Allan era muito calado, não permitia nenhum tipo de aproximação, ameaçava todos da escola, não se permitia conversar ou trocar nenhum outro tipo de comunicação, não participava das aulas e, a todo o momento, eu o ouvia sussurrar baixinho para os colegas, ameaçando e obrigando-os a dar o material – quando retornassem para a sala – e a fazer coisas para ele. Eu tentei a todo custo trazer esse estudante para o meu lado com conversas, propondo parceria; queria desenvolver nele um pensamento mais lógico e trabalhar em comunidade com os outros colegas, mas ele se negava a tudo isso. Ele começou a faltar e, quando aparecia – o que era raro –,ficava calado o tempo todo e, quando eu o convidava para vir ao quadro fazer a atividade ou pedia sua ajuda para resolver o problema, ele falava só uma vez que não iria e pronto. Tentei insistir um pouco mais, mas ele não ia ao quadro, não participava, mas também não atrapalhava a aula, não agredia os amigos, e eu o perguntava se ele tinha entendido, ele dizia que sim e me explicava algumas vezes com palavras breves.

Consegui destacar algumas atividades: *a bailarina*, *a pirâmide*, *máquina de funções* e *números triangulares*; nessas ele participou, e para mim isso significou que ele tinha um bom entendimento de raciocínio e que gostava de matemática. Assim, o objetivo que era ensinar matemática de uma maneira lúdica para esses dois estudantes foi realizado com respeito e afetividade e, ao final do semestre, eu não tive mais problemas com nenhum dos dois.

Conclusão

Faço minha as palavras de François Dubet:

> Os professores mais eficientes são, em geral, aqueles que acreditam que os alunos podem progredir, aqueles que têm confiança nos alunos. Os mais eficientes são também os professores que veem os alunos como eles são e não como eles deveriam ser (PERALVA; SPOSITO, 1997).

A afetividade e a confiança no potencial dos estudantes, o incentivo e, acima de tudo, o respeito de uma forma geral, juntos podem resolver muitos problemas de indisciplina e apatia em relação à matemática. O professor precisa ter sensibilidade para compreender e trabalhar individualmente com cada estudante e em grupo, sua socialização.

Nossas aulas são construídas em grupos e, durante esse processo, nenhuma aula é igual à outra, o estudante é o personagem central da trama, e cada opinião, cada "chute" conta e enriquece a experiência. Essa é a abordagem do Círculo da Matemática do Brasil, e o nosso objetivo é ensinar os estudantes a gostarem de matemática.

Bibliografia

PERALVA, A. T.; SPOSITO, M. P. Quando o sociólogo quer saber o que é ser professor: entrevista com François Dubet. *Revista Brasileira de Educação*. São Paulo, n.5/6, p. 222-231, 1997.

O que eu passei no Círculo da Matemática?

Carolina Raiol Lopes – Belém

Posso afirmar que tive sorte com os meus estudantes, desde o momento em que iniciei a jornada como educadora do Círculo da Matemática. Tive a oportunidade de conviver com crianças de diferentes realidades. Em meio a todas as diferenças de renda, de comportamento e de relacionamento, uma aula chamou minha atenção em vários sentidos. Estava diante de sete ou oito crianças, sendo que uma delas tinha déficit de atenção e outra era extremamente inteligente. Comecei a aplicar a atividade de *máquina de funções* que, naquele momento, chamei de *máquina de dinheiro*. Ou seja, as crianças "chutavam" valores e eles iam entrando na máquina e saindo diferentes.

Com o andamento da aula, e depois de termos realizado várias contas, com os valores iniciais e os finais, tentando descobrir o "segredo" da máquina, chamei os estudantes na lousa, para que cada um tivesse a sua própria máquina. O estudante que tinha déficit de atenção ficou muito animado com a atividade, mas, devido a algumas dificuldades, não conseguiu terminá-la sozinho. A outra estudante, que era muito extrovertida e extremamente inteligente, quis começar uma crítica ao colega.

No mesmo momento, intervi na situação e dei a ideia de ela ajudá-lo a concluir a máquina; então, fiz uma máquina para os dois completarem, de forma que um ajudasse o outro. Um falava o número, o outro calculava, um desenhava, o outro escrevia, e assim por diante. Observando a situação que se formou depois, senti um alívio imenso, pois, em uma aula tradicional, talvez não houvesse aquela possibilidade de incentivo aos estudantes. Naquele momento, pude observar o que talvez seria uma futura professora ensinando e um estudante inseguro tomando posse de uma segurança que sempre deveria ter estado presente. Ao olhar no relógio e ver que o tempo se esgotara, senti como se fosse aquele jogador de futebol que, no último minuto do jogo, marcou o gol de empate.

Por que o Círculo é relevante?

Ingressei na faculdade aos 17 anos e, desde então, ingressei na educação. Assim, iniciei os estágios, as aulas de reforço e, por fim, os artigos e as leituras sobre grandes

autores. Com a rotina pesada e cansativa de trabalho, acabamos por reproduzir o que sempre foi feito, sem pensar muito sobre a aprendizagem e, principalmente, sobre a individualidade de cada estudante.

Ao ingressar no Círculo, no ano de 2014, pude perceber algo completamente diferente. Nesse contexto, que é onde eu vivo atualmente, é possível perceber se o meu estudante aprende ou não. Também é possível repetir várias vezes a mesma ideia ou ação, até a plena satisfação tanto pessoal quanto dos meus estudantes. A importância do Círculo está nisso. O projeto tem diversos pilares, dos quais, para mim, dois são indispensáveis para qualquer profissional da educação, em qualquer nível de conhecimento. São eles: *ouvir de verdade*, por meio do qual pude perceber meus estudantes, de modo que todos os questionamentos, interrupções e até mesmo erros passaram a ser válidos. Além disso há o princípio de *organizar o quadro*, de modo que ele se torne um facilitador na transmissão do conhecimento.

Em suma, o Círculo transformou a minha noção de educação, mostrando que os estudantes merecem ser escutado e que a individualidade de cada ser humano precisa ser identificada. Mesmo ainda sendo professora de turmas regulares, atualmente, eu me esforço cada vez mais para produzir nos meus estudantes o gosto por essa disciplina tão linda, que é a matemática.

O que mudou na minha vida depois do Círculo da Matemática?

Bom, pelo lado pessoal, o Círculo me transformou em uma pessoa de fé. Parece confuso e estranho, mas depois de ingressar no projeto, voltei a ter fé na educação. Uma fé que eu já havia perdido em poucos anos de magistério. Além disso, aprendi a ter paciência com o outro, pude observar que cada um tem sua própria forma de aprender, e é necessário ter perseverança para com aqueles que têm mais dificuldade.

Profissionalmente falando, posso mencionar aqui 12 pontos que melhoraram e foram tema do meu trabalho de conclusão de curso (TCC). São eles:

- A quebra da visão de que trabalhar com crianças é fácil.
- A quebra da ideia de salas de aula com conhecimentos homogêneos.
- A maior responsabilidade quanto ao planejamento da aula.
- A maior aprimoramento dos conteúdos matemáticos.

• O desenvolvimento do hábito de estudar cotidianamente, para compreender com maior propriedade as dúvidas de cada estudante.
• A maior responsabilidade quanto ao domínio de classe.
• O respeito ao tempo de aprendizagem de cada estudante.
• A necessidade de ter uma boa relação profissional com a coordenação e com os demais professores que compõem o corpo docente.
• A possibilidade de diversificar as formas de ensinar.
• A possibilidade de os conteúdos serem repetidos e explorados de formas diferentes.
• A percepção de que nem sempre o que é ensinado é assimilado com perfeição pelos estudantes.
• A ideia de que a ação de ensinar e a ação de aprender nunca acabam, estão sempre se aprimorando.

Dado o exposto, fui capaz de observar que ocorre uma mudança expressiva no desenvolvimento da matemática que se ensina e que se aprende, no antes e no depois das aulas do Círculo da Matemática. Atrevo-me a enfatizar os pilares e as atividades como um diferencial do projeto e do ensino, além de um diferencial para a própria professora e educadora Carolina.

Os infinitos

Tássio Fonseca Feitosa

Durante as aulas do Círculo da Matemática, facilmente podemos destacar momentos que fazem com que esse projeto seja uma experiência incrível para nós, educadores. Todos os educadores sabem como é uma tarefa árdua desempenhar as suas atividades em escolas que, por muitas vezes, não podem fornecer uma estrutura adequada para os seus estudantes. Porém, tudo isso parece não ter muita importância quando se é possível, mesmo com todos os problemas, ver um sorriso verdadeiro no rosto de uma criança.

As aulas do Círculo da Matemática são capazes de despertar um sentimento único nas crianças. A essência dessa abordagem leva em conta a individualidade de cada uma delas e respeita as ideias e as percepções de todas elas, de forma que isso possa ser útil, de alguma maneira, para a construção do pensamento matemático. Dentre todas as minhas aulas do Círculo da Matemática, com certeza a que mais me chamou atenção foi quando começamos a falar sobre o *infinito*. Foi muito interessante ver como as crianças, desde pequenas, já têm a ideia do infinito e que, às vezes, não é preciso uma formalização para se compreender o que ele significa.

Ao começar a aula e questionar os estudantes se eles sabiam o que era o infinito, de imediato, alguns me responderam que sabiam o que ele era e que os números eram infinitos, ou seja, eles nunca acabavam. Até esse ponto tudo bem, mas a surpresa veio quando perguntei quais outros tipos de infinito eles conheciam, e foi nesse momento que as grandes mentes infantis desempenharam seu papel brilhantemente. Era um tal de "bactéria da bactéria que também tem uma bactéria", "pulga da pulga que também tem uma pulga", "filho do filho que também tem um filho" etc. Desse modo, criamos em sala o que chamamos de "correntes infinitas".

Para finalizar a aula, realizamos a atividade de cortar ao meio um pedaço de papel. Depois de tudo que havíamos conversado, eles logo entenderam alguns passos, que, se ficássemos cortando o papel sempre na metade, nós nunca iríamos conseguir fazer um corte de modo que o papel "acabasse". Porém, o papel não é infinito, mas a quantidade de cortes que podemos fazer dessa forma o é, ou seja, podemos sempre cortar ao meio o pedacinho de papel.

Essas atividades do Círculo da Matemática que envolvem uma grande conversa são sempre divertidas e acabam por nos surpreender, pois mostram como o pensamento de uma criança, muitas vezes, mesmo que do jeito deles, faz todo o sentido. E nós, educadores, estamos ali para ouvir esses estudantes e lhes dizer que sim, aquela ideia que determinado estudante falou é legal e faz todo o sentido, que não é uma bobagem. Isso faz com que a criança passe a se sentir mais autoconfiante e perceba que também pode fazer a matemática do jeito dela, voltando mais uma vez para a questão da individualidade de cada estudante. Por isso tudo é tão gratificante fazer parte do grupo de educadores do Círculo da Matemática, pois cada experiência vivida em sala de aula faz com que possamos entender cada vez mais o que as crianças esperam da matemática, um campo divertido, interessante e que pode ser feito ou descoberto do jeito que cada um quiser.

Alguns relatos

Gabrielle Brito Linhares

Minha participação no Círculo foi muito curta até agora, mas o impacto que ele teve sobre mim nesse curto período de tempo foi muito significativo. Pensando em tudo o que se passou, parece que faz muito mais tempo do que realmente aconteceu. *O início* – tudo muito lindo, muito novo, muito empolgante. Eu não via a hora de voltar da oficina e encontrar os estudantes, fazer acontecer, deixar que eles fizessem acontecer.

O meio – iniciei as atividades, e toda aquela expectativa se transformou em medo, medo de não conseguir ser tão boa quanto o projeto era. Reli os cadernos de apoio e assisti aos vídeos dos professores Kaplan. Disse a mim mesma: "Coragem!" – e fui. Fiquei impressionada com a forma como as crianças conseguem dar prosseguimento às atividades, como o tempo passa depressa, e como tudo ganha vida no Círculo – qualquer frase, cor e objeto pode ser utilizado para estimular a imaginação dos estudantes. E, quando menos se espera, lá está você e os "pequenos" pensando matematicamente, conversando sobre matemática.

No decorrer desses meses, tive também alguns desapontamentos, principalmente em relação ao comportamento de alguns estudantes – a indisciplina. Da mesma forma em relação à realidade escolar – falta de merenda, luz, água, ar-condicionado etc. Eu sempre procuro ter em mente as frases iniciais dos professores Bob e Ellen Kaplan, disponível no caderno 2 do guia para as aulas:

> Será exaustivo e eletrizante, cheio de prazeres e desapontamentos [...]. Que triunfo, se vocês conseguirem salvar uma única criança da ignorância paralisante! [...] Coragem, paciência, reflexão. Cada um de vocês é o centro silencioso de um esplendoroso Círculo da Matemática (INSTITUTO TIM, 2014).

Repetindo: "Coragem, paciência, reflexão". De tanto pensar nisso, essas palavras vieram me moldando nesses meses iniciais do Círculo: *coragem* para tentar algo novo, uma metodologia diferente; *paciência* para não desistir e seguir para o próximo passo; e *reflexão*, tanto sobre a realidade dos estudantes, quanto sobre a realidade escolar e, principalmente, sobre o impacto que eu tenho na vida de cada uma dessas crianças.

Atualmente, pude perceber que a paciência e a reflexão foram fundamentais para solucionar alguns problemas. No final, você sente quando está realizando os ajustes necessários e indo no caminho certo.

Esses aspectos que mencionei me ajudam a sempre procurar melhorar, a não me acomodar. E o resultado é inexplicável: ver a alegria dos estudantes quando descobrem ou formalizam algo com as suas próprias palavras, quando descobrem que o professor também erra – mesmo que propositalmente, pois a parte do "propositalmente" eles não sabem (risos) –, quando eles não têm medo de errar, entre outras situações que acontecem de forma espontânea e que só o Círculo pôde me proporcionar... Tudo isso me impulsiona a tentar fazer mais e melhor. Há muitos pontos que podem ser melhorados na área da educação, principalmente quando se trata de ensinar, de conduzir o estudante para que ele mesmo possa trilhar o seu caminho do conhecimento.

Porém, há alguns pontos que disparam o nosso senso de urgência, e um no qual me esforço a cada aula é o de aprender o nome de todos os estudantes – acho isso de suma importância. Outro ponto é o de fazer perguntas simples para incluir mais os estudantes e poder diversificar os problemas e as questões – ou seja, quanto mais formas se tem para envolver os estudantes nas atividades, melhor. Porque quanto mais eles se envolvem, mais eles conduzem o Círculo sozinhos.

É gratificante escutar de um estudante, nas últimas aulas, o quanto ele gosta de matemática, enquanto que, na primeira aula, o mesmo estudante dissera não suportar a disciplina. Com certeza, todos os esforços são válidos quando você percebe o impacto que tem na vida dessas crianças, quando elas compartilham seus sonhos e seus medos com você, por meio da matemática. Por meio de uma aula do Círculo da Matemática.

Bibliografia

INSTITUTO TIM. *O Círculo da Matemática do Brasil*: programa de ensino; guia para as aulas, caderno 2. Porto Alegre, 2014. Disponível em: <http://www.ocirculodamatematica.com.br/wp-content/uploads/2014/04/Caderno2_DIG.pdf>.

O que significa a matemática para os estudantes?

Lucas Gonzaga Cruz

Muitos adultos acreditam que a matemática é formada apenas pelas "continhas" de adição, subtração, multiplicação e divisão. Ao afirmarmos que somos professores de matemática, é comum ouvirmos suas experiências negativas com a matéria e sermos questionados a fazer algum cálculo que envolve as operações elementares.

Para transformarmos essa realidade, é necessário fazer com que as pessoas percebam que a matemática apresenta muito mais conteúdo do que elas acreditam. Essa visão limitada pode ter sido causada por vários fatores que podem tê-las impedido de continuar estudando, ou por terem problemas com os professores. O fato é que uma boa formação desde as séries iniciais nessa disciplina contribui imensamente para no futuro dos jovens, que estarão mais aptos a resolver desde problemas simples até os mais complexos.

Após me tornar educador do Círculo da Matemática do Brasil, logo nos primeiros anos, percebi que algumas crianças sofrem influências dos pais ou responsáveis em relação ao entendimento do que é a matemática, o que criou em mim o desejo de mudar essas crenças.

Em uma das turmas em que atuei como educador, tive uma estudante com cerca de 8 anos de idade, que demonstrava ter facilidade em aprender matemática. Ela conseguia entender com certa facilidade o que estava sendo proposto e, muitas vezes, conseguia responder mais rápido do que os colegas. Essa situação me deixava feliz, por perceber que ela estava progredindo e, ao mesmo tempo, tornava um pouco mais difícil a tarefa de manter os estudantes concentrados e participando, sem que ninguém se sentisse inferior ou com medo de dar suas opiniões ou simples palpites.

Durante uma das sessões, achei que os estudantes estavam "prontos" para resolver problemas um pouco mais difíceis e pensei em falar sobre frações. Iniciei uma das aulas falando sobre figuras geométricas e sobre como poderíamos dividi-las em partes iguais. No decorrer da aula, percebi que os estudantes estavam participando e conseguindo progredir, mas, nesse momento, aquela estudante abaixou a cabeça sobre a cadeira e começou a chorar. Fiquei preocupado, por achar que ela estivesse sentindo alguma dor e parei a aula para falar com ela.

Quando questionada sobre o motivo de estar chorando, ela respondeu que estava ali para estudar matemática, e que aquilo não era matemática. Eu procurei convencê-la do contrário, mas não obtive sucesso. Então, perguntei a ela: "O que significa matemática para você?", e ela pegou o pincel da minha mão e desenhou uma continha no quadro e a resolveu. Nesse momento, encontrava-me em uma situação complicada, pois todos os estudantes estavam participando, mas eu não poderia deixar uma estudante que participava tanto durante as aulas chorando daquele jeito. Alguns minutos depois, ela não quis mais participar da aula e pediu para voltar para a sala regular onde estava a professora.

O projeto Círculo da Matemática do Brasil, por trabalhar com uma abordagem diferenciada, colabora para transformar as crenças das crianças de que a matemática não é formada apenas por "continhas", para mostrar a elas que existe muito mais a se aprender.

A individualização e o erro

Paloma Franca

A metodologia do Círculo da Matemática teve grande influência no modo como eu me comporto dentro da sala de aula. Nesse intervalo de quase um ano em que participo do projeto, percebi uma mudança na minha postura e no meu pensamento como professora, no sentido de considerar elementos e comportamentos na sala de aula que antes eram ignorados e que podem fazer parte da construção do conhecimento matemático. Dentre os elementos que fazem parte da abordagem pedagógica do Círculo, os que mais captam a minha atenção na sala de aula são a *individualização do tratamento de cada criança* e a *valorização do erro*.

Quando trato meus estudantes chamando-os pelo nome, perguntando sua opinião sobre o possível resultado que deve aparecer e mostrando que a participação deles é fundamental para o andamento da aula, é fácil ver como eles se sentem integrados e empoderados. Essa é uma atitude simples, mas nem sempre é utilizada por aqueles que conduzem a aula. Talvez se pense que a generalização dá mais espaço para que os estudantes participem, quando, na verdade, essa atitude desencoraja os que sentem que sua opinião não tem valor.

Inicialmente, quando falo nas aulas do Círculo que o erro é importante, esse fato é visto com desconfiança pelos estudantes. Usualmente, eles consideram o erro como algo que deve ser evitado, porque aprenderam desde cedo a agir dessa maneira. Entretanto, nas aulas do Círculo, o erro é um instrumento de aprendizagem. Meus estudantes achavam estranho quando eu considerava seus palpites, mesmo que divergentes entre si, mas logo perceberam que esse é um meio de comparação com o resultado certo e um registro da forma de se pensar para análises futuras.

É óbvio que existem outros elementos da abordagem utilizada nas aulas do Círculo, mas esses dois me chamam atenção porque tratam do protagonismo dos estudantes nas aulas. Pude perceber que os meus estudantes são capazes de se articular melhor durante as aulas, porque sabem que sua participação é importante. O conhecimento não precisa nem deve ser unidirecional, isto é, que tenha de partir do professor para o estudante; ele deve transitar entre os personagens de uma sala de aula, a fim de que se atinja um objetivo comum, que, no caso, é o gosto pela matemática.

Testando a abordagem

Manoela Franco da Silva

Nesses três anos em que atuei como educadora do Círculo da Matemática, aprendi muito em vários aspectos. Houve uma turma que acompanhei durante três anos, quando os estudantes estavam no 2º, 3º e 4º anos do ensino fundamental. Foi impressionante como eles passaram a ver a matemática de forma diferente, e eu fiquei muito feliz por ter contribuído para a aprendizagem dessa turma de quase 30 estudantes. Podem ser poucos os que tiveram esse tempo tão grande para aprender com o método, mas tenho certeza de que eles irão passar adiante a ideia de gostar de matemática.

O Círculo da Matemática é um projeto incrível. Ensinar matemática à maneira do Círculo é empolgante, ver que os estudantes conseguem construir o conhecimento a partir do próprio pensamento é gratificante. Mesmo quando determinado estudante não quer participar das primeiras aulas, por timidez ou mesmo por não gostar de matemática, e ver que, depois de um tempo, esse mesmo estudante está querendo participar e que ele está pensando diferente, realmente é a melhor recompensa pelo trabalho que eu faço.

O Círculo da Matemática influenciou bastante a minha atuação profissional. Como sou professora do ensino médio e do ensino fundamental II, testei a abordagem com meus estudantes – e não é que funcionou? Usei praticamente toda a abordagem pedagógica do Círculo, ou seja: sempre perguntar, ao invés de entregar a informação diretamente, perguntar a opinião dos estudantes, valorizar o erro e ajudá-los a entender. Mesmo sendo uma tarefa difícil, eu consegui fazer com que adolescentes encarassem a matemática de uma forma diferente.

Eu sou uma pessoa apaixonada pela matemática, desde criança, mas o Círculo me ensinou a passar essa paixão adiante para meus estudantes, e eu sou infinitamente grata por isso.

Com os pequenos

Paulo Vinicius Pereira de Lima

As ideias sobre a formação inicial de professores de matemática têm sido bastante debatidas no decorrer dos últimos anos, na busca de novas práticas escolares, que possam contribuir para um processo formativo de licenciandos nesse campo do conhecimento, para que se possam refletir diretamente em suas atuações profissionais, contribuindo, assim, para a concretização ideal de uma educação de qualidade. Com isso, entendemos que, ao longo dos últimos anos, a educação matemática tem ganhado força, especialmente no que diz respeito a projetos magníficos com novas metodologias de ensino que visam a contribuir para uma educação de equidade.

Projetos na área de educação matemática que se preocupam, de alguma forma, em fazer com que a educação se torne algo prazeroso de se aprender e que, com isso, o estudante – o ser aprendente – possa ser transformador do espaço e mudar de alguma forma a realidade do seu meio social. Acontece que, nos projetos pelos quais eu passei e tenho passado há o seguinte pensamento: "estamos preocupados em mudar essa realidade social, mas nos esquecendo do pilar dessa realidade, que são os estudantes pequenos".

A matemática se aprende desde cedo, e os projetos pelos quais passei têm propostas inovadoras, metodologias eficazes, mas voltados para professores que, de certa forma, irão lecionar ou já lecionam para estudantes do ensino fundamental II (6º ao 9º ano), fase na qual muitos estudantes chegam na sala de aula com uma bagagem de deficiência quanto aos conhecimentos básicos que deveriam ter adquirido ao longo do seu processo de aprendizagem quando pequenos (fundamental I, do 2º ao 5º ano).

Tendo em vista isso, conheci o Círculo da Matemática do Brasil, que é um projeto fabuloso, no qual se trabalha a matemática desde a educação básica com os pequenos do fundamental I, utilizando uma metodologia voltada para a criatividade e a motivação dos estudantes, para que estes participem e se sintam motivados a aprender. Tal metodologia viabiliza o erro como uma ferramenta de aprendizagem com a qual possamos trabalhar diferentes estratégias de aprendizagem. Minha percepção inicial foi fantástica, pois, se pensarmos que, ao plantarmos uma semente e cuidarmos dela desde o início, acompanhando todo o seu processo, não teremos problemas futuros, como ter que podá-la ou arrancá-la pela raiz. E o Círculo é isso: é você plantar e cuidar desde cedo, acompanhando todo o processo, e não depois.

A prática da inclusão

Victor Ribeiro

Em 2013, no ano inicial do projeto nas escolas, havia uma estudante do 2ª ano que era muito calada, tímida e pouco participativa, tanto nas aulas regulares quanto nas aulas do Círculo. A professora da turma e os colegas de classe diziam que ela era "especial", fazendo referência ao fato de ela não interagir com ninguém e, quando se sentia pressionada, ela chorava com facilidade.

No início das aulas do projeto, logo percebi tais características da estudante. Quando íamos para a sala com a turma separada, ela ficava no canto, escondida atrás de uma estante. Não se sentava com os colegas, não respondia a nenhuma pergunta e, se se perguntava até mesmo seu nome ou idade ela começava a chorar. Sempre de maneira contida, as lágrimas caiam, demonstrando que as perguntas a afetavam como se fossem parte de uma sessão de pressão psicológica aterrorizante. Os colegas sempre a rotulavam como "especial", como incapaz de estar no mesmo nível da turma, e ela parecia acreditar nisso. Por esse motivo, a meu ver, ela não tentava fazer nada que envolvia a interação com outros estudantes.

Entretanto, na terceira ou quarta aula do projeto, quando chegamos a discutir sobre o *labirinto*, ela começou a expressar de forma clara a vontade de participar da atividade. Quando perguntei se ela gostaria de tentar mostrar o melhor caminho a seguir, ela hesitou, mas, em seguida, pegou o pincel e desenhou um caminho dentro do labirinto. Meio tímido, aparentemente sem considerar parâmetro algum, mas mostrando que existia nela o interesse em participar como os colegas.

As aulas sempre se iniciavam da mesma maneira. A estudante em pé no canto, tímida para se juntar aos colegas, mas ainda sim continuamos as atividades nas aulas seguinte. No decorrer das atividades, ela passou a se sentar junto dos colegas e a levantar a mão quando achava que era "seguro" participar, demonstrando uma real mudança de atitude, que já havia ocorrido com o restante da turma.

No dia em que tivemos a visita da profissional que iria realizar as filmagens da aula para a coordenação do projeto, eu escolhi a turma da estudante "especial". Falamos sobre os *pontos explosivos*, destacando o barulho "bum!", quando juntávamos dez pontinhos. Foi evidente que ela, a estudante "especial" de que todos falavam, interagia

da mesma forma que os colegas, pulando na hora da "explosão", sorrindo e fazendo o barulho que a situação propusera. E, se formos pensar, tudo isso aconteceu por causa de uma simples aula de matemática.

Essa situação me marcou profundamente, pelo fato de mostrar o quanto a participação no Círculo da Matemática proporcionou a mudança das crianças, no sentido atitudinal e comportamental, da escola em geral. Do mesmo modo, também foi possível inserir uma criança que, aparentemente, sentia-se perdida e sem vontade de interagir com os colegas em uma prática na qual todos têm oportunidade de descobrir coisas novas.

Motivação

Rodrigo Turrini Purgato

Quando pensei em me tornar professor de matemática, meu objetivo foi trazer aos meus estudantes uma realidade diferente da que normalmente encontramos por aí. Isso porque, mesmo sendo algo tão importante e presente em nossas vidas, algumas vezes a matemática é trabalhada de forma desmotivante e por profissionais que não se esforçam ou não têm a capacidade para isso, principalmente nas escolas públicas.

Quando conheci o Círculo, identifiquei-me na hora com a proposta, uma vez que muitas mudanças que eu via como necessárias para o ensino da matemática no país estavam presentes em sua metodologia. Isso que me fez perceber que havia pessoas e instituições dedicadas a realizar as mudanças na forma de ensinar, as quais motivem os estudantes a aprender.

No projeto, foi possível aprender muito sobre o que o professor pode fazer para incentivar e ensinar os estudantes de uma maneira divertida e de que eles gostem. A importância de cada um aprender por si mesmo e em seu próprio tempo é enorme, sendo que o professor está ali apenas fazendo o papel de mediador. Durante as aulas, eu fico comovido de ver as crianças que são vistas como indisciplinadas ou tímidas apresentando uma enorme evolução durante o ano, não tendo medo de se expressar e descobrir, e respeitando os seus colegas.

Por fim, fico muito feliz em fazer parte desse projeto e de saber que existem pessoas dedicadas a melhorar a educação, principalmente para aquelas crianças que mais precisam disso.

Por que nunca falam dessas coisas na sala de aula?

Alexandre Trilles Junior

Trabalhar no Círculo da Matemática do Brasil foi, no começo, adentrar um mundo completamente desconhecido. A melhor parte foi descobrir os prazeres que essa experiência junto com as crianças, no dia a dia da sala de aula, bem como o prazer que espero que elas tenham com essa abordagem pedagógica cuidadosamente desenvolvida pelos professores Kaplan e adaptada à nossa realidade por educadores que se espalha pelos quatro cantos do Brasil para, de alguma forma, fazer a diferença.

Trabalhar separadamente com matemática e crianças não era novidade, mas fazê-lo simultaneamente foi algo totalmente novo. Confesso que, no início, tive medo por achar que não seria capaz, que não alcançaria meu objetivo aplicando essa abordagem, e esse medo se manteve até uma aula em que senti que estava no caminho certo. Já estava por volta de dois meses no projeto, mas era a primeira vez em que via uma aula real nos moldes do Círculo. As crianças estavam eufóricas, criando e descartando hipóteses, e minha função lá era apenas mediar alguns conflitos mais efusivos e, algumas vezes, conduzir os raciocínios. Foi tudo um sucesso e, apesar de as discussões terem seguido por um caminho que não era o pretendido inicialmente por mim, aquele dia foi o primeiro em que isso não me incomodou.

Mais do que isso, naquele dia, eu já podia colocar minha cabeça no travesseiro e dormir com tranquilidade, com a sensação de dever cumprido, já saía de sala com um sorriso que demonstrava uma felicidade que não cabia em mim, quando surge na minha frente uma criança, daquelas bagunceiras, que, em meio a todo o caos de um recreio escolar, me parou e perguntou: "Tio, mas por que nunca falaram dessas coisas na sala de aula?"

Na minha cabeça, vários questionamentos acerca de toda a estrutura de ensino e suas falhas, toda a minha revolta com professores mal preparados e com aulas tradicionais, que pouco nos somam em conhecimento além de algoritmos sem uma lógica para se embasar, deram espaço a um pensamento mais otimista inspirado no que Bob falou, e me fez responder: "Acho que é o tipo de coisa que é mais legal a gente descobrir

sozinho, não?". "É mesmo! É por isso que a sua aula é mais legal, lá a gente pode falar o que pensa e sempre acaba descobrindo algo legal!"

Logo após, vendo aquele menino correr, se perdendo em meio ao caos, pude ter certeza de que o nosso trabalho não era em vão. Quem sabe um dia todos poderão ter experiências como as que esse projeto proporciona, não só como dar aula, mas principalmente assistir a uma aula. Afinal, quando se descobre, não se esquece.

Sem amor não se faz matemática

Dyego Soares de Araújo

O Círculo da Matemática do Brasil é uma ferramenta desenvolvida para transformar realidades. Tanto é assim que, para ser capaz de aprender, dominar e adquirir segurança com essa técnica – abordagem, método, é sempre difícil escolher a palavra –, minha própria realidade foi transformada. Elaboro: eu sou um engenheiro por formação, matemático por paixão e educador por acaso. Meu conhecimento a respeito da existência do Círculo da Matemática, assim como o de muitos amigos, foi completamente aleatório. Uma visualização em uma página do Facebook, um envio de currículo e uma entrevista em inglês com uma senhora que aparentava falar espanhol, foram o bastante para me garantir uma passagem de avião para Porto Alegre. Creio que poucas coisas se modificaram tanto dentro de mim como o efeito cascata que se seguiria, nessa sequência um tanto quanto improvável de eventos.

Em Porto Alegre, entrei em contato com pessoas de todo o país, com gente diferente de todos os lugares, cada um com seu jeito, e todos ali atraídos pelo casal de senhores que se sentavam na frente do palco, propondo que as coisas não precisavam ser como eram. E, durante cinco dias, vimos – ou pelo menos eu vi – todas as nossas certezas a respeito da educação, de como ela deveria ser, se desmancharem diante dos nossos olhos. Eles falavam sobre coisas que ressoavam diretamente com o que eu acreditava, mas que nunca tinha ousado colocar em prática.

Eu confesso que, um dia, já fui uma dessas pessoas que acreditam que existem aqueles que simplesmente gostam de matemática, e outros que não gostam. Eu mesmo, por exemplo, creio que gosto porque me disseram que era difícil e que poucos compreenderiam. Essas mesmas palavras já "roubaram" a matemática de muitas pessoas. E não precisava mais ser assim. A partir dali eu vi que não precisava mais ser assim. A partir dali eu estava para sempre cativado por essa ideia: *a matemática pode ser para todos*.

Muita coisa teve de mudar dentro de mim para que eu me adequasse. Eu não sou naturalmente talentoso com crianças, nem estava habituado a falar a língua particular que elas falam. Lembro-me com um pouco de vergonha de que, quando era criança,

dizia a mim mesmo que, mesmo adulto, eu nunca esqueceria como é ser criança, e de tudo o que a gente pensa e sente. Se pudesse falar comigo mesmo aos 10 anos de idade, eu me pediria desculpas por ter esquecido, mas em seguida diria que já estou me recuperando. Hoje, eu já posso me aproximar de uma criança e perguntar qual é o programa de TV favorito dela, e ter consciência de que o episódio de ontem foi a coisa mais importante que já aconteceu. Hoje, eu posso ouvir uma criança e fazer uma pergunta que a leva no caminho de mais perguntas que, juntos, nenhum dos dois sabe responder. Hoje, eu posso fazer matemática com as crianças.

Fazer e compreender a matemática sozinho é muito fácil, se comparado a encarar dez pares de olhos centrados em você, esperando respostas. Tenho um imenso carinho e respeito por todos aqueles que se dedicaram a essa profissão, porque creio que poucas coisas são tão nobres quanto se prestar a educar uma geração. Antes, eu acreditava no mito do talento, daquelas pessoas que nasciam e automaticamente as crianças já gostavam delas. Hoje, eu compreendo que, embora existam, sim, pessoas talentosas, o talento verdadeiro reside na vontade de querer fazer melhor, bem como na perseverança de seguir quando tudo dá errado.

Não foram poucas as vezes em que tudo deu errado. Crianças pulando, gritando umas com as outras, correndo em volta da mesa. Firmeza é algo curioso, talvez seja a forma mais curiosa de carinho que se pode dar a uma criança. Dizer o que não é necessário, resistir à tentação de satisfazer automaticamente a curiosidade de uma criança, em troca de deixá-la lutar e aprender o valor da busca. É tão difícil dar aquele carinho que não desperta carinho de volta, mas, sim, a revolta momentânea. Creio que a maior lição, que ainda luto para compreender em toda a sua extensão, é a de que *a disciplina é uma forma de amor*.

E, sem amor, não se faz matemática. É curioso pensar nisso, visto que se fala tão pouco de sentimentos quando se trata de matemática. Exceto por ocasionais declarações de amor pela beleza dos padrões descobertos, da matemática como um todo, ou mesmo de um pequeno *insight*, pouco é dito sobre a relação afetiva necessária para a transmissão e a produção da matemática. Esse é um ponto-chave para se compreender o Círculo da Matemática. Aqui, eu finalmente reconheci que, sem uma relação afetiva, sem seres humanos dialogando de maneira transparente, não é possível que a matemática ocorra. Pela primeira vez, eu percebi que existem sentimentos que permeiam cada parte do ensino da matemática. E é curioso como esse fato se assemelha às verdades matemáticas: antes de percebido, misterioso. Depois de compreendido, óbvio.

Depois de algumas oficinas, mais pessoas novas e mais experiências com crianças e com professores, posso dizer que muita coisa mudou dentro de mim. As perspectivas com

as quais eu encarava a educação matemática e a própria profissão docente adquiriram outras dimensões. Muita coisa aprendi e muita coisa ainda tenho por aprender. Mas o certo é que aquela percepção de realidade de um garoto prestes a se formar engenheiro é algo que há muito tempo já se transformou dentro de mim.

Para encerrar, um certo clichê a respeito daqueles que tentam mudar o mundo é o que diz: "Antes de mudar o mundo, mude-se a si mesmo". Creio que, nesse projeto, esbarramos em um meio-termo. Estamos, sim, todos empenhados em mudar o mundo. Entretanto, enquanto isso acontece, reflexos do mundo que queremos ver se manifestam de maneira sorrateira em nós mesmos. Ou seja, aos poucos nós vamos mudando o mundo, e isso, à sua maneira, vai nos mudando. Espero algum dia estar aqui para ver os reflexos daquilo que estamos plantando hoje. Espero um dia acordar e ter mudado o mundo.

Conta uma história de horror para a gente?

Felipi Marques da Rocha Pinto

Em uma das aulas do Círculo, perdi a grande oportunidade de desenvolver uma atividade pelo fato de não aproveitar a fala de uma estudante. Pedi para os estudantes se sentarem e fui conversar com eles, pois, naquele dia, estavam muito agitados e não estavam me ajudando. Expliquei que não seria possível continuar, porque dependia deles para seguir com a aula. Então, uma menina falou: "Tio, conta uma história de horror para a gente!" Então, pedi que ela contasse uma, porque não consegui formular nada rapidamente, ela contando e eu pensando... Não consegui formular nada que desse para aproveitar naquele momento e retomar a atenção dos estudantes, então tive de mudar de assunto, mas minha decepção ficou tão nítida que o nível da aula caiu ainda mais. Naquele dia, fiquei chateado pela oportunidade perdida, até porque, no final da noite, eu já sabia exatamente tudo o que poderia ter feito naquele momento.

Durante essa semana, tive a oportunidade de me redimir: no final de uma, aula outra estudante me pediu para contar uma história, fiquei empolgado, mas me contive, pedi para ela contar a que ela sabia e, depois, iniciei a minha – parecia mágica! Todos olhavam para mim, prestando atenção, inventando os nomes dos personagens e formando a história: consegui propor a ideia de que havia um guerreiro que entrou em um labirinto e que, nesse labirinto havia um monstro, e que o guerreiro tinha que sair vivo para se casar com a princesa que o esperava no final do labirinto. Desenho no quadro, crianças ansiosas e atentas, até que o sinal toca e é hora de ir embora: "Ahhhh..." e, como no ápice de uma conquista, eu me senti renovado e ansioso pela próxima aula. É hora do *labirinto*!

O chefão do fim do jogo

Mateus Marques da Cunha

Inicio meu relato contando uma ocasião em que fui observar as aulas de uma educadora em uma escola municipal do Rio de Janeiro. Durante as aulas, eu pedi licença para mediar uma aula com as crianças – majoritariamente meninos –, que se mostravam desinteressados com a aula. Comecei conversando com eles e perguntando sobre seus gostos, e descobri que gostavam de jogos eletrônicos e *videogames*. Nesse momento, tive a ideia de transformar a clássica atividade da reta numérica em um pequeno jogo, com diferentes fases, em que os heróis iriam se aventurar para finalizar cada uma delas por meio dos pulos. A bailarina virou o herói e, no fim da reta, surgiu um "chefão do fim do jogo", e a atividade conquistou os meninos da turma.

Depois de concluídas as fases, o "chefão" propôs um desafio numérico envolvendo uma combinação numérica que deveria ser adivinhada para se ganhar todos os pontos e, em equipe, os estudantes colaboraram para descobrir a senha da fase final. Depois de todos tentarem, faltava apenas um número, e o menino que estava mais tímido, por fim, foi encorajado pelos demais e deu um palpite certeiro para a resolução do mistério! O "chefe" fora derrotado, e as crianças foram à loucura com a atividade!

Depois desse dia, percebi o quanto a metodologia dos professores Kaplan é benéfica para o ensino da matemática nas escolas, vendo que esta sofre um processo de degradação no cotidiano escolar. O medo da matemática é aprendido, não inato. Assim, minha visão sobre a educação mudou completamente após o contato com o Círculo da Matemática do Brasil, porque nós, na condição de educadores, somos estimulados a pensar em outras formas de ação e de prática docente, para tornar nossas aulas muito mais estimulantes e interessantes.

No "chiqueirinho", não!

Rafael Eduardo Silva

Em 2015, como educador do Círculo da Matemática, vivenciei algumas situações que me fizeram crescer como ser humano. Quando penso em situações marcantes que vivi dentro de sala de aula, muitas me vêm à mente, mas há uma que me preenche, tanto do ponto de vista que tenho como professor/educador, quanto do ponto de vista humano. Esse fato aconteceu logo no início das atividades do ano passado.

Havia separado os grupos de uma turma que participaria do Círculo ao longo do ano, apenas pelos nomes dos estudantes. No momento em que fui convocá-los para a primeira aula semanal do ano, chamando-os consecutivamente pelos nomes, não imaginaria o que viria a seguir, ao chamar o estudante D. Assim que o chamei, percebi que não havia recebido resposta de estudante algum; então, me direcionei à professora para saber se ela sabia do paradeiro do estudante. Surpreendi-me, então, de uma maneira que me marcou para sempre, quando a professora respondeu: "Então, professor, o D. é um estudante que tem deficiência mental e, se o senhor se sentir confortável em incluí-lo em suas sessões de aula junto com os outros, o senhor pode chamá-lo. Caso contrário, o senhor pode jogá-lo de volta ao 'chiqueirinho', como todos nós fazemos". Não tive muita reação àquela resposta, além de dizer à professora que iria, sim, incluí-lo nas aulas e perguntar onde ficava o tal "chiqueirinho", para que pudesse chamá-lo, além de pensar que esse "chiqueirinho" não poderia se caracterizar pelo seu significado literal. A professora disse que eu poderia ir até os fundos da escola, atrás do bloco de salas de aulas, e que lá eu o encontraria.

Assim que cheguei, a dor em meu coração foi imensa, e não tive nada mais do que uma falta de reação que me preencheu. O "chiqueirinho" era, na verdade, um "chiqueiro" mesmo: um cercadinho no fundo da escola, cheio de terra e lama, onde D. brincava sozinho, com o uniforme da escola, mas sujo de terra e descalço. Sem muito o que fazer, já que aparentemente aquele era um processo normal para todo o ambiente escolar, eu o chamei para perto de mim, e disse para que colocasse seus chinelos e viesse comigo, pois iríamos fazer uma atividade bem legal na sala de aula e precisávamos dele. Percebi seu olhar meio paralelo ao que eu estava falando, e pedi que ele acenasse a cabeça, dizendo se havia entendido, o que ele fez D. então colocou seus chinelos, eu o levei para lavar as mãos em uma torneira que havia ali perto, e fomos para a sala de aula. Lá chegando, percebi ainda mais o quão complexa era aquela situação.

Comecei a aula com uma atividade simples, construindo com os estudantes a reta numérica e, por meio de marcações que eu tinha pedido para que eles mesmos fizessem, fui pedindo que eles estipulassem os valores. Perguntei para um deles qual poderia ser o primeiro valor a ser colocado na reta, e a criança escolheu o 0 (zero), na primeira marcação. Algumas perguntas depois, pedi para que o D. escolhesse uma marcação na reta e um número para diferenciá-la das outras. Antes que ele sequer pudesse falar qualquer coisa, todas as crianças interromperam e disseram que ele não saberia responder, pois era "maluco", "burro", entre outras coisas maldosas. Antes de qualquer comentário quanto a eles, considerando que o conhecimento deles sobre a complexidade daquele assunto era limitado, resolvi dar uma chance para que D. participasse da aula. Então, ele escolheu a marcação que havia entre as marcações que representavam o 3 e o 5, respectivamente, e pediu para que eu colocasse o 4 entre eles. Elogiei a escolha, notei que os outros estudantes se entreolhavam, e um ar de surpresa ocupou a sala. Nesse momento, percebi o quanto eles eram "educados" para aceitar a exclusão daquele estudante, por sua diferença em relação aos outros.

A partir daí, minha missão nesse grupo não era mais apenas conduzi-los a descobrir a matemática, mas também a descobrir o melhor uns dos outros, para que começassem a se olhar, a princípio nessas aulas, por meio das coisas boas que iriam descobrir de si, e não por suas diferenças. A intenção era que isso começasse dentro do grupo, e que se espalhasse para o resto da turma durante as aulas da professora. Mesmo que fosse quase um sonho, pela tentativa de resolver aquele problema sendo o único a levantá-lo no ambiente escolar, eu ansiava que aquilo se disseminasse pela escola. Mal podia eu saber, nesse ponto da história, o quanto essa missão me faria crescer do ponto de vista humano, como professor/educador.

Conseguir fazer com que D. fosse aceito no grupo; não foi difícil, considerando a atenção e os estímulos que dei a ele durante as aulas. Pude conversar sobre aquela situação com os estudantes dos outros grupos dessa mesma turma e, em alguns momentos do ano, mudava D. de grupo para que os outros também tivessem a oportunidade de conviver com ele, primeiramente nas aulas do Círculo e, consequentemente, com o tempo, todos o incluíssem na sala de aula. Fui percebendo que, cada vez com menos frequência, D. estava fora da sala quando ia chamá-lo para participar das aulas, e quando estava, já sentava perto dos outros colegas e conversava com eles.

A cada ocasião, aquela experiência se tornava mais gratificante, além de abrir cada vez mais a minha cabeça para outras situações que presenciei não apenas nessa escola, mas na vida, fazendo-me crescer não só como educador, mas como ser humano, e

me tornando mais preparado para entrar em uma sala de aula. E tudo isso eu devo ao simples fato de ter aberto a cabeça para novas experiências.

Experiências humanizadoras

Andreia Ferreira Fernandes e Priscilla Perez

Ao fim de uma das reuniões de equipe, nós estávamos realizando uma análise sobre como a experiência com o Círculo da Matemática modificou nossa prática na sala de aula. Embora o comportamento seja diferente em cada cidade, algo faz com que esses estudantes transformem seu comportamento e sua maneira de estar dentro das salas de aula. Relataremos abaixo alguns dos casos mais expressivos que surgiram na nossa conversa.

Andreia: Eu entrei no Círculo da Matemática em 2015. Foi a primeira vez em que eu entrei em uma escola pública municipal, mas já esperava os casos de indisciplina, de estuantes violentos e agressivos, e pensava em como teria de agir diante disso. A princípio, tomei as turmas de 1º ao 4º ano do ensino fundamental. O 1º e 3º anos eram turmas que não me apresentavam muitas dificuldades, mas no 2º e no 4º ano, eu precisava de muita ajuda. Na turma do 2º ano, tratava-se de um estudante específico que chamarei de G., para respeitá-lo. Esse estudante raramente aparecia na escola, mas quando aparecia, era fácil saber, pois ele sempre estava fora da sala. Quando não saia por vontade própria, era porque sua professora o havia retirado. Seu castigo era ficar do lado de fora da sala, em pé, durante os cinco tempos de aula. Caso ele se sentasse, a professora e as inspetoras apareciam para repreendê-lo. Por duas semanas, tentei pedir à professora que o deixasse ir para a sala de aula do Círculo, mas ela disse: "Ele tem uma 'doença' que não sabemos qual é. Levá-lo para a sua aula pode 'contaminar' as outras crianças, porque ele não sabe nada. Mas você pode tentar e, no primeiro problema, você tira ele da sala". Respondi que preferia tentar e consegui levar G. para a sala. Chegando lá, todos se sentaram, menos G.; ele perguntou se podia se sentar, pois na sala, a "tia" não deixava ele fazer isso. Meu coração ficou partido. Para trabalhar com o estudante G., foi necessário, primeiro, preparar a turma para aceitá-lo.

Agressividade e xingamentos não eram tolerados G. se jogava no chão, corria pela sala ou ficava em pé ao meu lado, buscando a atenção de seus colegas. Um dia, perguntei a ele por que fazia isso. Sua resposta foi: "Para eles gostarem de mim, tia". Conversei com ele e disse que aquela não era a melhor forma de fazer isso. O ideal seria ele participar da aula, demonstrar carinho por seus amigos e, assim, ele conseguiria a atenção de uma maneira boa. Ele tentou e, após duas semanas, seus colegas já falavam: "Poxa,

o G. não veio hoje". Infelizmente, a professora dessa turma se mostrava irredutível quanto a tentar inserir esse estudante em sua sala de aula, mas ficou feliz por ele ter mudado. Quase no final do ano, fiquei conhecendo do histórico familiar desse estudante G. teve um irmão gêmeo que morreu assim que os dois nasceram. Os pais não conseguiram superar essa perda e não tratavam G. com a alegria de um filho que sobreviveu, mas com a tristeza de ter sido ele que sobreviveu. É uma história triste de um estudante que passava por um processo de rejeição que começou dentro de casa.

Com a turma do 4º ano, a dificuldade não era com um estudante mas com um grupo de oito estudantes. Todos eram rapazes com idades entre 10 e 15 anos, moravam na comunidade do Pavão-Pavãozinho e não viam sentido na escola. Eram muito agressivos, violentos e falavam gritando. Logo no primeiro dia de atividades, esse grupo disse que não aceitaria se eu os separasse e eu respeitei essa posição, desde que eles não atrapalhassem o desenvolvimento das atividades. Ao sair da sala, um deles disse à professora: "Ainda bem que não vou te aturar!" Parecia se tratar de um estudante indisciplinado como eu já esperava, até que a professora respondeu: "Ainda bem que ela veio na sexta-feira, porque é o único dia em que eu teria que aturar vocês nos cinco tempos!" Não se tratava de um sentimento apenas dos estudantes para com ela: a intolerância, a falta de paciência e a falta de respeito eram recíprocos. Eu sempre busco realizar minhas atividades com um tom normal de conversa, para que as aulas do Círculo sejam, de fato, uma "conversa na mesa de jantar", como propõe Bob Kaplan. Identifiquei que aquele grupo tinha um "líder" e procurei me aproximar dele. Embora soubesse o seu nome, o chamava o de "Meno" – ou "Menor".

Adaptei minha linguagem e as atividades para a linguagem do cotidiano deles. Aos poucos, encontrar aquela turma era mais fácil, os encontros eram proveitosos e, ao final, eles até me chamaram para comemorar o aniversário na casa deles. A diretora da escola, surpresa com o carinho e a receptividade desses estudantes para comigo, me chamou para conversar e, em seguida, me convidou para participar do Conselho de Classe e tentar intervir no resultado final de estudantes aprovados e reprovados. Para a professora, apenas sete estudantes seriam aprovados. Após o Conselho de Classe e a intervenção do Círculo da Matemática, apenas sete ficaram retidos.

Priscilla: Em Belém, quando cheguei para realizar a divisão dos grupos, percebi que havia três irmãs gêmeas. Segundo a professora, elas não aceitavam se separar e não respondiam nem ao "bom-dia" na sala de aula. Respeitei esse pedido das estudantes e coloquei as três no mesmo grupo. No primeiro contato, percebi que elas eram extremamente tímidas e que não dialogavam com os demais estudantes. Passei a

utilizar ainda mais as nossas estratégias para incluir os estudantes, com o objetivo de mostrar que, ali, era o espaço onde errar promovia discussões e ajudava no processo de aprendizado. Em todas as aulas com aquele grupo, meu maior desafio era obter palpites e opiniões de forma mais natural. No primeiro dia em que essas estudantes participaram da aula, senti que meu trabalho estava começando a dar certo. Embora aqui eu o esteja relatando de maneira rápida, foi um longo processo! Após as férias de julho, essas estudantes voltaram mais falantes e participativas. Inacreditavelmente, no final do ano, conseguíamos separar as três. Ao permitirem se separar, essas estudantes demonstravam confiança no trabalho que eu estava realizando e mostravam que estavam se tornando confortáveis e independentes no espaço escolar.

Diante de alguns desses relatos, pudemos perceber a importância de se ter uma proposta com foco na humanização e no processo de ensino-aprendizagem dos estudantes. Assim como o *Math Circle* foi adaptado para a realidade das escolas brasileiras, cada cidade e, consequentemente, cada educador ajusta os tópicos da abordagem do Círculo de acordo com as suas turmas. Ou seja, a abordagem do Círculo da Matemática funciona como uma ferramenta para ajudar quanto ao comportamento dos estudantes, para melhorar o aprendizado e, como resultado disso, obter estudantes, de fato, inseridos na escola.

THE GLOBAL MATH CIRCLE
TOMORROW'S HORIZON

UNESCO
Organização das Nações Unidas para a Educação, a Ciência e a Cultura

Cooperação Representação no Brasil

UFRGS

Instituto TIM

ISBN 978-85-66094-49-7

9 788566 094497